

9

السنة التاسعة
من التعليم الاساسي

الجزء الأول



المعهد التربوي الوطني - الجزائر

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الرياضيات

السنة التاسعة من التعليم الأساسي

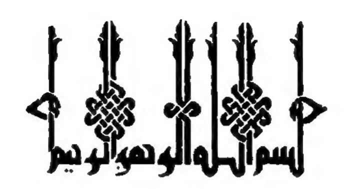
الجزء الأول



المعهد التربوي الوطني - الجزائر

لجنة التأليف :

السيدة زهية فارسي : مفتش التربية والتكوين
السيد بشير كسكسة : « « «
السيد محمد الطاهر طالبي « « «
السيد مصطفى بن زرقة « « «
السيد محمد بوخروبة : أستاذ الرياضيات بمعهد تكوين الأساتذة بالحراش (الجزائر)
السيدة آسية بركاني : مفتش التعليم المتوسط لمادة الرياضيات
السيد مقتدر زروقي : أستاذ الرياضيات بمعهد تكوين الأساتذة ببن عكنون (الجزائر)



المقدمة :

يشكل هذا الكتاب آخر كتاب من سلسلة كانت تهدف أساسا إلى جزأرة الكتاب المدرسي الخاص بتدريس الرياضيات في التعليم المتوسط .

وسهرا منا على أن يظهر جليا اهتمامنا بالمواصلة في كيفية تقديم كتب الرياضيات احتفظنا بالميزات التي اتسمت بها الكتب السابقة ألا وهي :

ـ أسلوب مباشر ربسيط بقدر الامكان يدفع التلميذ إلى المشاركة الحقيقية والفعالة .

ـ تعدد التمارين عند نهاية كل جزء من نفس الفصل وهذا حتى تتسنى فرصة امتحان التلميذ على مدى فهمه للمفهوم المقدم .

ـ تعدد التمارين عند نهاية كل فصل مما يفتح للأستاذ باب الأختيار على مصرعيه

يستمر تدريب التلميذ على دقة الاستدلال الرياضي مع مراعاة انسجامها والقدرات الذهنية لتلميذ السنة الرابعة متوسط . وتسمح هذه القدرات ببعض التدرج في التجريد .

هذا وإنه لا يمكن في مستوى هذه السنة أن نبرهن وان نبرر كل ما يرد والشيء الأساسي في ذلك أن نشير عند الحاجة بكل وضوح إلى الخصائص التي تقبل بعد أن نكون قد قدمنا مثالا أو أمثلة متعددة .

ويجب أن يبقى الحساب العددي والحساب الجبري وتعضيد التقنيات الخاصة بالعمليات على كل اشكالها الشغل الشاغل للأستاذ طيلة تدريسه .

حاولنا على مستوى المفاهيم الرياضية أن نقدم الصعبة منها بصفة ملموسة قدر الإمكان وبدون أن نضحي ، في نظرنا ، بالدقة الرياضية التي تلازم المادة نفسها ، وفي هذا المضمار بدا لنا أن الأختيارات التي قمنا بها أكثر تناسبا مع إمكانيات ادراك التلاميذ للمفاهيم المقدمة .

إن النقاط التي يكتسي تقديمها الصعوبة والدقة هي لا محالة النقاط التالية :

1 ـ الاعداد الحقيقية باستخدام النشرات العشرية غير المحدودة .

2 ـ الأشعة باستخدام تساير الثنائيات النقطية من المستوي .

3 ـ نظرية طاليس باستخدام تدريج المستقيم والاسقاطات المتوازية .
4 ـ نظرية فيتاغورث باستخدام نسبة الاسقاط العمودي .

وإن لفتنا انتباه المعلمين إلى المفاهيم السابقة الذكر فهذا لا يعني البتة ان باقي المفاهيم لا يتضمن أية صعوبة بالنسبة لفهمها واستيعابها من طرف التلاميذ .

ويلاحظ اننا لم نركز قصدا على المفاهيم الأساسية الخاصة بالمجموعات والعلاقات ايمانا منا بأن التطبيقات العديدة التي دارت حولها إلى غاية هذه السنة تسمح لنا بأن نظن وان نأمل انها استعيبت واصبحت تستعمل بصحة ومهارة .

هذا وإنه من البديهي ان لغة المجموعات والعلاقات والرموز الرئيسية المناسبة ستستعمل كلما دعت الضرورة إلى ذلك .

فلنشر إلى اننا ابرزنا مفهوم بنية الزمرة كلما أتيحت الفرصة لذلك ولسنا في حاجة إلى التركيز على الأهمية التي تكتسيها هذه البنية في التكوين العلمي .

يجب على الأستاذ ألا ينسى أبدا أن الكتاب المدرسي مهما كان ما هو إلا مرجع من المراجيع وفي هذا الاطار يمكن أن يتبين له أننا قد أطلنا شيئا ما في بعض العروض فعندئذ يمكن له أن يقدم المفاهيم المعنية بصفة أقل تعمقا إن ظن ان ذلك يكون أفيد وأنجع

ومن جهة أخرى فإنه من الخطير على تكوين تلامذتنا الاطالة بإفراط في عرض بعض المفاهيم والاهمال لبعضها الآخر مع ان لكل مفهوم أهميته الخاصة ويجب عندئذ تقدير حكيم ومناسب .

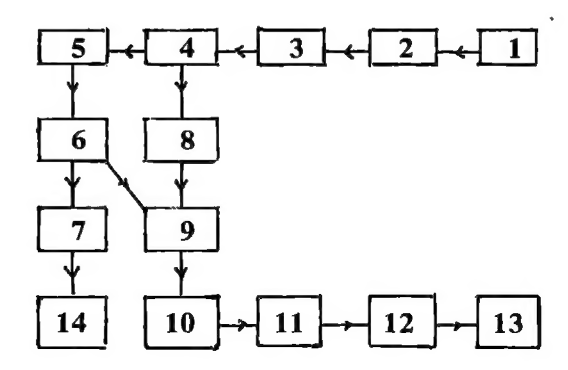
ولنذكر في هذا المضمار انه يلزم الشروع في تدريس الهندسة في وقت مبكر من السنة الدراسية حتى يتسنى للتلاميذ فرصة استيعاب هذه المادة .

وبما أن كل عمل نقوم به قابل في حد ذاته للتحسن فإننا نرحب بكل الانتقادات وبكل الاقتراحات التي سوف ترد من كل مستعملي هذا الكتاب . وعلى جميع الزملاء موافاتنا عن طريق المصالح المعنية للمعهد التربوي الوطني بملاحظاتهم ولهم مسبقا جزيل الشكر .

والله الموفق

هيئة التأليف

التسلسل الموصى عليه



ملاحظة : يسمح هذا التسلسل بالشروع في تدريس الهندسة في وقت مبكر من السنة الدراسية مما يتيح هكذا فرصة التطرق إلى الجبر والهندسة بصفة موازية بعد أن يكون التلاميذ قد استوعبوا مفهوم العدد الحقيقي .

1

التطبيـق ـ الـدالة
مفهـوم الزمـرة

1 ـ التطبيق ـ الدالة

1 . 1 . التطبيـق :

* يمكنك أن ترفق بكل عدد صحيح نسبي قيمتهُ المطلقة التي هي عدد طبيعي .

تكون قد عرفت هكذا علاقة من **ص** نحو **ط** ، وهذه العلاقة هي :

« ... قيمته المطلقة ... »

هذه العلاقة ترفق بكل عنصر من **ص** عنصرا واحدا فقط من **ط** . فهي إذن **تطبيق** من **ص** في **ط** .

سمّ تا هذا التطبيق .

تكتب : تا : **ص ⟵ ط**

س ⟼ |س|

وتكتب أيضا : تا (س) = |س|

لديك : تا ((- 4) = 4

تقول إن 4 هو **صورة** - 4 بالتطبيق تا .

تعريف :

> تكون العلاقة من مجموعة سہ نحو مجموعة ع **تطبيقا** من سہ في ع إذا أرفقت بكل عنصر من سہ عنصرا واحدا فقط من ع .

سہ هي **مجموعة البدء** ، ع هي **مجموعة الوصول** لهذا التطبيق

سمّ ها هذا التطبيق .

تكتب : ها : سہ ⟵ ع

س ⟼ ها (س)

ها (س) هي **صورة س** بالتطبيق ها

يمكنك أن تعين هذه الصورة بأحد الحروف : ص ، ع ...

• إن التطبيق حا من سـ في سـ الذي يرفق بكل عنصر س من سـ العنصر س نفسه هو **التطبيق الحيادي** للمجموعة سـ .

لديك : حا : سـ ← سـ

س ↦ س

(أ = {-1 ، -3 ، 5 ، -2 ، 3 ، 2 } ؛

ب) = {25 ، 9 ، 4 ، 0 ، 1 }

بين أن العلاقة « ... مربعه ... » من أ نحو ب هي تطبيق من أ في ب

اعط بيان هذا التطبيق .

ارسم مخططه السهمي ثم مخططه الديكارتي .

ب) أ = { س / س ∈ ط و س < 6 }

بين أن العلاقة : « ... هو باقي القسمة على 6 لـ ... » تطبيق من ط في أ .

سمّ تا هذا التطبيق . احسب تا (18) ، تا (225) ، تا (1046) .

ج) ب = { س / س ∈ ص و -3 ⩽ س < 3 }

أعط بيان التطبيق الحيادي للمجموعة ب .

2.1. التقابل :

تا هي التطبيق من ط في ط* بحيث تا (س) = س + 1

كل عنصر ع من ط* هو صورة لعنصر واحد فقط من ط

العدد الصحيح الذي يسبقه أي ع - 1 .

إذن تا هو **تقابل** من ط في ط* .

تعريف :

يكون التطبيق من مجموعة سـ في مجموعة ع تقابلاً من سـ في ع إذا كان كل عنصر من ع صورة لعنصر واحد فقط من سـ .

أ) هل التطبيق من صہ في ط الذي يرفق بكل عدد صحيح قيمته المطلقة تقابل ؟

هل التطبيق من صہ في صہ الذي يرفق بكل عدد صحيح نسبي مربعه تقابل ؟

ب) ف هي مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية الفردية

تا هي التطبيق من ط في ف بحيث : تا (س) = 2 س + 1

بين أن تا تقابل .

ج) ها هي التطبيق من ط في ط بحيث : ها (س) = 2 س + 1

هل ها تقابل ؟

د) بين أن التطبيق الحيادي لمجموعة سہ هو تقابل من سہ في سہ

3.1. الدالة :

أ = { 1 ، 6 ، -4 ، 25 ، 9 } ؛ ب = { -5 ، 0 ، 3 ، -1 }

أوجد البيان بہ للعلاقة « ... هو مربع ... » من أ نحو ب تحصل على :

بہ = { (1 ، -1) ، (25 ، -5) ، (9 ، 3) } .

ارسم المخطط السهمي لهذه العلاقة (شكل 1)

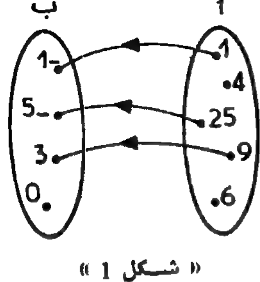
تلاحظ أنه من العنصر -4 لا ينطلق أي سهم ،

ومن العنصر 6 لا ينطلق أي سهم .

تلاحظ أيضا أنه من كل من العناصر

1 ، 9 ، 25 ينطلق سهم واحد فقط .

يمكنك أن تتأكد مما يلي :



« شكل 1 »

من كل عنصر من أ إما ألا ينطلق أي سهم ، وإما أن ينطلق سهم واحد فقط نحو عنصر من ب .

تقول إنه من كل عنصر من أ ينطلق **على الأكثر** سهم واحد نحو عنصر من ب .

إن العلاقة « ... هو مربع ... » من أ نحو ب ترفق بكل عنصر من أ عنصرا **على الأكثر** من ب .

تقول إن هذه العلاقة **دالة** من أ في ب .

تعريف :

إن علاقة من مجموعة سـ نحو مجموعة ع **دالة** من سـ في ع إذا أرفقت بكل عنصر من سـ عنصرا واحدا **على الأكثر** من ع .

سـ هي **مجموعة البدء** ، ع هي **مجموعة الوصول** لهذه الدالة

يمكن تعيين دالة بالحروف : ىا ، ها ، د

تكتب مثل ما كتبت بالنسبة للتطبيق

د : سـ ← ع

س ↦ د(س)

تقول إن د (س) هي **صورة** س بالدالة **د**.

يمكنك تعيين هذه الصورة بأحد الحروف ، ع ، ص .....

عندما تكون مجموعة الوصول هي مجموعة عددية ، يمكنك أن تقول إن **د** . هي **دالة عددية** .

يمكنك أن تقول إن **د** (س) هي **قيمة د** في س وإن مجموعة صور عناصر المجموعة سـ بالدالة **د** هي **مجموعة قيم د**.

4.1. مجموعة تعريف دالة :

د هي الدالة المذكورة في الفقرة 1 ـ 3

ما هي مجموعة عناصر أ التي لها صورة بالدالة **د**؟

هي المجموعة { 1 ، 25 ، 9 }

تقول إن هذه المجموعة هي **مجموعة تعريف الدالة د**.

تعريف :

مجموعة تعريف دالة **ىا** من سـ في ع هي مجموعة العناصر من سـ التي لها صورة بالدالة **ىا** .

يمكنك أن تعين مجموعة تعريف دالة تا بالرمز : ف$_{تا}$ أو ف
إنك تلاحظ أن ف ⊃ أ .

أ) ب و جـ مجموعتان
بين أن كل تطبيق تا من ب في جـ دالة .
ما هي مجموعة تعريف تا ؟

ب) ك مجموعة الأعداد الناطقة
ها هي الدالة من ك في ك التي ترفق بكل عدد ناطق مقلوبه
ما هي مجموعة تعريف ها ؟

جـ) أ = { 0 ، 1 ، 6 ، $\frac{3}{2}$ ، – 2 } ؛ ب = { 8 ، 0 ، 3 ، – 4 ، 11 }

- هل العلاقة « ... ضعفه ... » من أ نحو ب دالة ؟
ما هو بيان هذه العلاقة ؟
ارسم المخطط السهمي ، ثم المخطط الديكارتي لهذه العلاقة

د) تا ؛ ها ؛ لا ثلاث دوال من ك في ك حيث تا (س) = $\frac{1}{س(س-1)}$ ؛

ها (س) = س^2 – 4 ؛ لا (س) = $\frac{1}{س^2 - 4}$

أوجد مجموعة تعريف كل من هذه الدوال

5.1. تساوي دالتين :

تعريف :

تكون الدالتان تا ، ها من س في ع **متساويتين** إذا كانت لهما نفس مجموعة التعريف ف وإذا كان لكل عنصر من ف نفس الصورة بواسطة تا و ها .

يمكنك أن تكتب : نا = ها إذا كان من أجل كل عنصر س من ف
نا (س) = ها (س) .
تلاحظ أن للذالتين نا وها نفس مجموعة البدء ونفس مجموعة الوصول .
تلاحظ أيضا أن :
تطبيقين من سـ في ع متساويان إذا كان لكل عنصر من سـ نفس الصورة بالتطبيق الأول وبالتطبيق الثاني .

أ) نا و ها تطبيقان من ك في ك بحيث نا (س) = $\left(س + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ ؛
ها (س) = $س^2$ + س
احسب نا (− 1) ، ها (− 1) ، نا ($\frac{3}{2}$) ، ها ($\frac{3}{4}$) .
بين أن نا = ها .

ب) نا . ها دالتان من ك في ك بحيث: نا (س) = $\frac{س^2 + 1}{س}$ ، ها (س) = س + $\frac{1}{س}$
بين أن : نا = ها

---

2 ـ العملية الداخلية ـ مفهوم الزمرة

1.2 . العملية الداخلية

ف = { أ ، ب ، ج }
يمكنك أن ترفق بكل ثنائية مرتبة من ف × ف عنصرا واحدا فقط من ف .
ماذا تكون قد عرفت هكذا ؟
لقد عرفت تطبيقا من ف × ف في ف
تقول إن :
هذا التطبيق هو **عملية داخلية** أو هو **قانون تركيب داخلي في ف**

عين هذه العملية الداخلية في ڡ بالرمز * .
إن الجدول الممثل في الشكل 2 هو جدول هذه العملية

*	أ	ب	جـ
أ	جـ	ب	أ
ب	ب	أ	جـ
جـ	أ	جـ	ب

« شكل 2 »

تعريف :

نسمي **عملية داخلية** في المجموعة س كل تطبيق من س × س في س

لكي تعين عملية داخلية يمكنك أن تستعمل أحد الرموز : * ، ⊥ ، T ، ○ ...
إنه قد سبق لك أن استعملت لتعيين بعض العمليات الداخلية الرموز الآتية :
+ ، × ، − ، ∩ ، ∪ .

أ) ڡ = { أ ، ب ، جـ }
أوجد ب مجموعة أجزاء ڡ .
ارفق بكل ثنائية مرتبة (س ، ع) من ب × ب المجموعة س ∪ ع .
بين أنك قد عرفت هكذا عملية داخلية في ب . (هي عملية الاتحاد في ب
التي نرمز لها بـ : ∪)

ب) ب هي المجموعة المذكورة في التمرين أ السابق .
ارفق بكل ثنائية مرتبة (س ، ع) من ب × ب المجموعة س ∩ ع .
بين أنك قد عرفت هكذا عملية داخلية في ب . (هذه العملية هي عملية
التقاطع في ب التي نرمز لها بـ : ∩)

جـ) هل الجمع في ص عملية داخلية في ص ؟
هل الطرح في ص عملية داخلية في ص ؟
هل الطرح في ط عملية داخلية في ط ؟

د) س = { 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 } ؛ ص = { 0 ، 3 } ؛
هـ = { 0 ، 4 ، 2 } ؛ و = { 1 } ؛ د = { س ، ص ، هـ ، و ، φ }
ارفق بكل ثنائية مرتبة (أ ، ب) من د × د المجموعة أ ∩ ب
هل تكون قد عرفت هكذا عملية داخلية في د ؟

2.2 . الزمرة (صـ ، +)

تعرفأن الجمع في صـ تجميعي ، وأنه يقبل عنصرا حياديا وأن لكل عنصر من صـ نظير بالنسبة للجمع .
تقول إن المجموعة صـ **المزودة** بالجمع **زمرة** ترمز لها بما يلي : (صـ ، +)
تقرأ : « الزمرة صـ زائد » .
تعرف أيضا أن الجمع في صـ تبديلي ، **تقول** إن : الزمرة (صـ ، +) **زمرة تبديلية**

3.2. الزمرة (سـ ، *)

سـ مجموعة ، أرمز بالرمز * لعملية داخلية في سـ .

- متى تقول إن العملية * تجميعية ؟

تقول إن هذه العملية **تجميعية** إذا تحقق ما يلي :
من أجل كل عناصر ا ، ب ، جـ من سـ : (ا * ب) * جـ = ا * (ب * جـ)
متى تقول إن العملية * **تبديلية** ؟
تقول إن هذه العملية **تبديلية** إذا تحقق ما يلي :
من أجل كل عنصرين ا ، ب من سـ : ا * ب = ب * ا .

- متى تقول إن للعملية * **عنصرا حياديا** ؟

تقول إن لهذه العملية **عنصرا حياديا** إذا وجد عنصر و من سـ بحيث أنه من أجل كل عنصر س من س : س * و = و * س = س .
تقول ايضا إن و هو عنصر حيادي للعملية *

- في حالة ما إذا قبلت العملية * عنصرا حياديا و ، متى تقول إن العنصر س من سـ يقبل **نظيرا** بالنسبة للعملية * ؟

تقول عن عنصر س من سـ أنه يقبل نظيرا من أجل هذه العملية إذا وجد عنصر سَ من سـ بحيث :
سَ * سَ = سَ * س = و

تعريف :

تكون المجموعة سـ المزودة بالعملية * **زمرة** إذا كانت هذه العملية تجميعية وإذا قبلت عنصرا حياديا وإذا كان لكل عنصر من سـ نظيرا بالنسبة إلى هذه العملية .

تكتب (س ، *) وتقرأ : « الزمرة س نجمة »
إذا كانت بالإضافة العملية * تبديلية تقول إن الزمرة (سـ ، *) **زمرة تبديلية** .

أ) هل المجموعة صـ المزودة بالضرب زمرة ؟
هل يُوجد عنصر من صـ له نظير بالنسبة للضرب ؟
ب) هل المجموعة ك المزودة بالضرب زمرة ؟
بين أن المجموعة ك* ، المزودة بالضرب زمرة تبديلية .
جـ) ع * مجموعة الأعداد النسبية العشرية غير المعدومة .
هل المجموعة ع * المزودة بالجمع زمرة ؟
هل المجموعة ع* المزودة بالضرب زمـرة ؟

تمـاريـن

1 . أ = { 7 ، 8 ، 9 ، 15 ، 21 ، 13 } ب = { 2 ، 3 ، 11 ، 17 ، 26 }
ع هي العلاقة « ... هو مضاعف ... » من أ نحو ب
1) هل العلاقة ع تطبيق ؟
2) هل ع دالة ؟ إذا كاز الأمر كذلك فما هي مجموعة تعريفها . ؟
2 . ف = { أ ، ب ، جـ ، ء ، هـ } ب = { -1 ، 0 ، 1 }
إذا شاهدت المخطط السهمي للعلاقة ع من ف نحو ب تلاحظ أنه :
يصل للعنصر -1 من ب سهم وحيد ينطلق من العنصر ب من ف
يصل للعنصر 0 من ب سهم وحيد ينطلق من العنصر ء من ف
يصل للعنصر 1 من ب سهم وحيد ينطلق من العنصر حـ من ف
يصل للعنصر -1 من ب سهم وحيد ينطلق من العنصر أ من ف

1) ارسم هذا المخطط

2) هل العلاقة ع تطبيق ؟

3) هل العلاقة ر دالة ؟ إذا كان الأمر كذلك ، ما هي مجموعة تعريفها ؟

3 . ف = { ا ، ب ، جـ ، ء ، هـ ، و } ، ب = { $-\frac{3}{4}$ ، 0 ، $\frac{2}{3}$ ، -1 ، 4 }

ه = { (ا ، 0) ، (جـ ، -1) ؛ (ء ، $-\frac{3}{4}$) ، (و ، 4) }

ع هي العلاقة من ا نحو ب التي بيانها ه .

1) هل أن ع تطبيق ؟

ارسم مخططها السهمي ثم مخططها الديكارتي

2) بين أن ع دالة .

أوجد مجموعة تعريفها .

4 . س = { -4 ، 3 ، -1 } ص = { 0 ، -2 }

1) أوجد كل التطبيقات من س في ص .

هل يوجد من بين هذه التطبيقات تقابل ؟

2) أوجد كل التطبيقات من ص في س .

هل يوجد من بين هذه التطبيقات تقابل ؟

5 . ا = { 13 ، 5 ، 94 ، 22 ، 12 } ب = { 33 ، 55 ، 62 ، 27 ، 78 }

ع هي العلاقة « ... له نفسُ رقم آحاد ... » من ا نحو ب .

1) اعط بيان هذه العلاقة ثم ارسم مخططها السهمي .

2) هل هذه العلاقة تطبيق ؟

3) بين أن العلاقة ع دالة . اعط مجموعة تعريفها .

4) عَ هي العلاقة « ... له نفس رقم آحاد ... » مِن ب نحو ا .

ما هو بيان عَ ؟

هل أن عَ تطبيق ؟ هل هي دالة ؟

6 . ا = { 12 ، 26 ، 57 ، 39 ، 62 ، 50 } ؛ ب = { 2 ، 1 ، 5 ، 3 }

ع هي العلاقة « ... رقم عشراته ... » من ا نحو ب .

1) هل أن ع تطبيق ؟

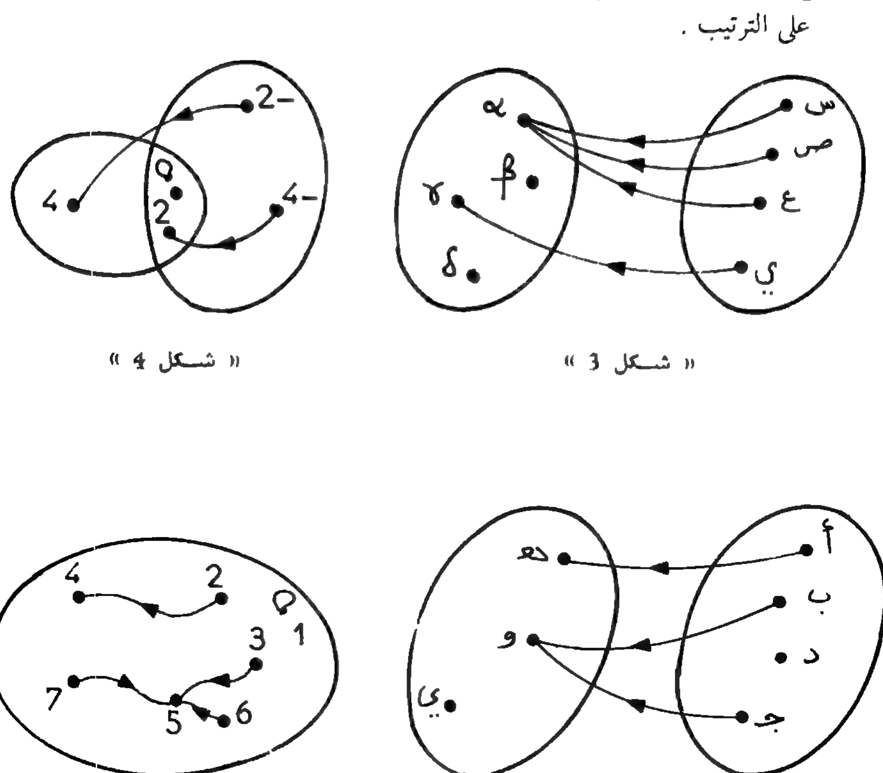
2) بين أن ع دالة . اعط مجموعة تعريفها .

3) عَ هي الغلاقة « ... هو رقم عشرات ... » من ب نحو ا

اعط بيان هذه العلاقة .

4) هل العلاقة عَ تطبيق ؟ هل هي دالة ؟

7 . ع ، ف ، ت ، ء هي العلاقة الممثلة بمخططاتها السهمية في الأشكال 3 ، 4 ، 5 ، 6 على الترتيب .



« شكل 3 »

« شكل 4 »

« شكل 5 »

« شكل 6 »

1) اعط بيان كل من هذه العلاقات .

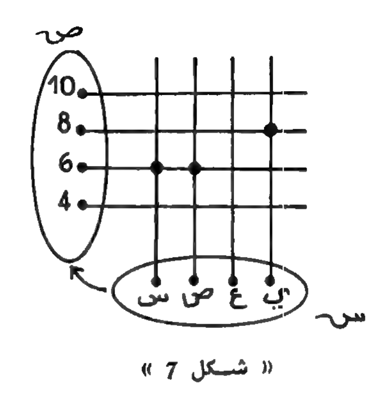
2) من بين هذه العلاقات ما هي العلاقات التي هي دوال ؟

من بين هذه العلاقات ما هي العلاقات التي هي تطبيقات ؟

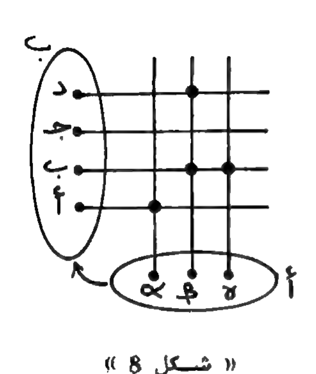
من بين هذه العلاقات ما هي العلاقات التي هي تقابلات ؟

3) كلما تجد دالة في السؤال الثاني أعط مجموعة تعريفها .

8 . ع ، ع′ ، ت ، ت′ هي العلاقات الممثلة بالمخططات الواردة في الأشكال 7 ، 8 ، 9 ، 10 على الترتيب



« شكل 7 »



« شكل 8 »

ف		×			
د					
جـ			×		×
ب	×				
أ					
	α	β	γ	δ	ε

« شكل 9 »

8				×
6			×	
4		×		
2	×			
	2	4	6	8

« شكل 10 »

نفس الأسئلة الواردة في التمرين 7 .

9 . ه = { أ ، ب ، جـ ، د } ؛ ب = { و ، س ، د ، ع ، ب }

$ع_1$ ، $ع_2$ ، $ع_3$ ، $ع_4$ هي علاقات من ه نحو ب ، بياناتها على الترتيب $ه_1$ ، $ه_2$ ، $ه_3$ ، $ه_4$ بحيث :

$ه_1$ = { (أ ، ب) ؛ (د ، س) ؛ (ب ، س) ؛ (ب ، و) } ؛

$ه_2$ = { (أ ، و) ، (ب ، د) ؛ (جـ ، س) ؛ (د ، ب) }

$ه_3$ = { (ب ، ع) ؛ (أ ، س) ؛ (جـ ، س) ؛ (د ، ب) }

$ه_4$ = { (أ ، و) ؛ (جـ ، و) ؛ (ب ، ب) ؛ (ب ، ع) }

1) ارسم المخطط السهمي ثم الديكارتي لكل من العلاقات $ع_1$ ، $ع_2$ ، $ع_3$ ، $ع_4$

2) من بين هذه العلاقات ما هي العلاقات التي هي دوال والتي هي تطبيقات والتي هي تقابلات ؟

3) كلما تجد دالة في السؤال الثاني اعط مجموعة تعريفها .

10 . س = { 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 }

ع هي العلاقة ... « ... ضعف ... » في س .

1) اعط بيان ع ، ارسم مخططها السهمي

2) هل العلاقة ع دالة ؟ إذا كان الأمر كذلك أعط مجموعة تعريفها .

3) ص هي العلاقة .. « ... هو نصف ... » في س .

هل العلاقة ص دالة ؟ إذا كان الأمر كذلك أعط مجموعة تعريفها .

11 . ط مجموعة الأعداد الطبيعية

بين أن الطرح في ط دالة من ط × ط في ط .

ما هي مجموعة تعريف هذه الدالة ؟

12 . تا تطبيق من ص في ص بحيث تا : س ← | س |

1) ما هي مجموعة عناصر ص التي صورتها 7 ؟

ما هي مجموع عناصر ص التي صورتها − 3 ؟

2) هل التطبيق تا تقابل ؟

13 . تا هي العلاقة « ... نصفه ... » من ط نحو ط

1) بين أن تا دالة . أوجد مجموعة تعريفها ؟

2) هل العلاقة « ... ضعفه ... » من ط نحو ط دالة ؟

14 . ه = { −2 ، −1 ، 0 ، 1 ، 2 } ؛ ب = { 0 ، 1 ، 4 }

عا هي العلاقة « ... مربعه ... » من ه نحو ب .

1) بين أن عا تطبيق ؟

2) هل العلاقة « ... هو مربع ... » من ب نحو ه تطبيق ؟

هل هي دالة ؟

15 . تا هي العلاقة « ... ضعفه ... » من ط نحو ط

ه هي العلاقة « ... ضعفه ... » من ص نحو ص

ع هي العلاقة « ... ضعفه ... »من ص نحو ص

هل أن كلا من العلاقات تا ، ه ، ع دالة ؟ هل انها تطبيق ؟ هل انها تقابل ؟

16 . ا = { 0 ، 2 ، 5 ، 6 ، 8 ، 12 ، 15 ، 19 ، 22 } ؛

ب = { 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 }

تا هي الدالة من ا في ب بحيث تا (س) = $\frac{س}{3}$

1) هل أن تا تطبيق ؟

2) ما هي مجموعة التعريف اَ للدالة تا ؟

3) ما هي المجموعة ب′ لصور عناصر أ بواسطة الدالة تا ؟
4) بين أن العلاقة من أ′ نحو ب′ التي لها نفس البيان مع تا هي تقابل من أ′ في ب′

17 . تا هي العلاقة « ... مربعه ... » من ط نحو ط .
1) بين أن تا تطبيق
2) هل العلاقة « ... هو مربع ... » من ط في ط تطبيق ؟ هل هي دالة ؟

18 . ف = { أ ، ب ، جـ ، د ، و } ؛ ب = { 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 }
ع علاقة من ف نحو ب ، ع′ علاقة من ب نحو ف
في كل من الحالات الآتية أعط بيان العلاقة ع بحيث أن :
1) ع دالة وع′ ليست دالة .
2) ع و ع′ دالتان .
3) ع تطبيقا وع′ ليست تطبيقا .
4) ع وع′ تطبيقان .

19 . ف = { أ ، ب ، جـ ، د ، هـ } ؛ ب = { 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 }
1) أعط البيان $ب_1$ لدالة من ف في ب .
اعط البيان $ب_2$ لتطبيق من ف في ب
اعط البيان $ب_3$ لتطبيق آخر من ف في ب
اعط البيان $ب_4$ لتقابل من ف في ب
2) سم تا العلاقة من ف نحو ب التي بيانها $ب_2 \cap ب_3$
سم ها العلاقة من ف نحو ب التي بيانها $ب_4 \cap ب_3$
سم لا العلاقة من ف نحو ب التي بيانها $ب_1 \cup ب_3$
هل أن تا دالة ؟ هل هي تطبيق ؟ هل هي تقابل ؟
هل أن ها دالة ؟ هل هي تطبيق ؟ هل هي تقابل ؟
هل أن لا دالة ؟ هل هي تطبيق ؟ هل هي تقابل ؟

20 . س = { أ ، ب ، جـ ، د ، هـ ، و } ؛ ص = { 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 }
1) أعط جزئين أ ، ب من س بحيث : أ ⊃ ب
2) أعط البيان ب لتطبيق تا من س في ص .
3) سمّ أ′ مجموعة صور عناصر أ بواسطة تا
سم ب′ مجموعة صور عناصر ب بواسطة تا
بين أن : أ′ ⊃ ب′
4) سمّ ج مجموعة صور عناصر أ ∪ ب بواسطة تا
سم ن مجموعة صور عناصر أ ∩ ب بواسطة تا

بين أن جـ = أ′ ∪ ب′ .

هل أن : د = أ′ ∩ ب′ ؟

21 . تا هي دالة من ط في ط بحيث : تا (س) = 2 س − 9

1) احسب تا (5) ؛ تا (7) ، تا (10)

2) ما هي مجموعة التعريف أ للدالة تا ؟

3) ها تطبيق من أ في ط بحيث : ها (س) = 2 س − 9

بين أن ها تقابل ؟

22 . تا و ها دالتان من ك في ك بحيث :

$$\text{تا (س) } = \frac{5}{\text{س} - 2} \quad ; \quad \text{ها (س) } = \frac{2}{\text{س}^2 - 1}$$

1) احسب تا (0) ؛ تا (− 1) ؛ تا (1) ؛ تا ($\frac{3}{4}$)

2) احسب ها (0) ؛ ها (2) ؛ ها ($\frac{3}{4}$) ؛ ها (− $\frac{1}{2}$)

3) ما هي مجموعة تعريف تا ؟ ما هي مجموعة تعريف ها ؟

23 . (د) دائرة مركزها م ونصف قطرها نق .

(ق) مستقيم خارج عن (د)

ع هي العلاقة من (د) نحو (ق) التي ترفق بالنقطة ن من (د)

النقطة ن′ من (ق) بحيث : { ن′ } = (م ن) ∩ (ق)

1) بين أن العلاقة ع دالة

2) ما هي مجموعة تعريف هذه الدالة ؟

24 . (ق) ، (ق′) ؛ (Δ) ثلاث مستقيمات من المستوي (شكل 11)

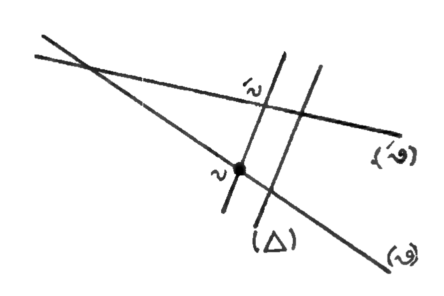
تا هي العلاقة من (ق) نحو (ق′)

التي ترفق بالنقطة ن من (ق) النقطة

ن′ من (ق′) بحيث :

(ن ن′) // (Δ) (شكل 11)

بين أن تا تقابل من (ق) في (ق′)



« شكل 11 »

25 . (ف) و (فَ) مستقيمان متقاطعان (شكل 12)
ﻫ نقطة بحيث ﻫ ∉ (ف) و ﻫ ∉ (ف).
ع هي العلاقة من (ف) نحو (فَ)
التي ترفق بالنقطة ن من (ف)
النقطة نَ من (فَ) بحيث :
{ نَ } = (فَ) ∩ (ﻫ ن) (شكل 12)
1) بين أن ع دالة من (ف) في (فَ)
2) ما هي مجموعة تعريف هذه الدالة ؟

« شكل 12 »

26 . (د) دائرة مركزها م ونصف قطرها نق ، ج هو خارج الدائرة (د) .
تا هي العلاقة من (د) نحو ج التي ترفق بالنقطة ن من (د)
النقطة نَ من ج بحيث ن منتصف القطعة [م نَ]
1) بين أن تا تطبيق من (د) في ج .
2) هل أنا تا تقابل ؟
3) ما هي مجموعة صور عناصر (د) بواسطة تا ؟

27 . تا و ها تطبيقان من ك في ك بحيث :

ها (س) = $\frac{1}{4}$ س + $\frac{7}{5}$ ، تا (س) = س − $\frac{2}{3}$

1) احسب تا (1) ؛ تا ($\frac{1}{2}$) ؛ تا (− $\frac{1}{3}$) ؛ ها (− 1) ها ($\frac{3}{4}$)

2) بين أن تا و ها تقابلان .

28 . يكون العدد الصحيح س **مضاعفا** للعدد الصحيح ص إذا وجد عدد صحيح ك بحيث أن س = ك ص
1) ﻫ = { 24 ، − 6 ، 4 ، 30 ، − 10 ، − 3 ، 5 ، − 32 }
أعط بيان العلاقة « ... هو مضاعف ... » في المجموعة ﻫ .
أرسم المخطط السهمي لهذه العلاقة ؟
2) بين أن العلاقة « ... هو مضاعف ... » في ص هي علاقة ترتيب .

29 . كل عدد صحيح مضاعف للعدد 2 هو عدد صحيح **زوجي**
كل عدد صحيح ليس مضاعفا للعدد 2 هو عدد صحيح **فردي** .
1) بين أن كل عدد صحيح زوجي يكتب على الشكل 2 ن حيث ن عدد صحيح .

بين أن كل عدد صحيح فردي يكتب على الشكل 2 ن + 1 حيث ن عدد صحيح.

2) سم صـز مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية

سم صـف مجموعة الأعداد الصحيحة الفردية

بين أن { صـز ، صـف } هي تجزئة للمجموعة صـ .

3) + هو رمز الجمع في صـز . بين أن (صـز ، +) زمرة تبديلية .

4) هل المجموعة صـف المزودة بالجمع زمرة ؟

30 . م₅ مجموعة الأعداد الصحيحة التي هي مضاعفات 5

1) بين أن المجموعة م₅ المزودة بالجمع هي زمرة تبديلية

2) هل أن م₅ المزودة بالضرب زمرة ؟

31 . نفس الأسئلة بالنسبة للمجموعة مـن التي هي مجموعة مضاعفات العدد الطبيعي ن

32 . ا = { + ، − }

1) أوجد المجموعة ا × ا

2) إن جدول الشكل 13

هو جدول عملية داخلية في ا

حيث رمز هذه العملية هو*

أوجد باستعمال الجدول :

+ * + ؛ + * − ؛ − * − ؛ − * − .

بين أن (ا ، *) زمرة تبديلية :

*	+	−
+	+	−
−	−	+

« شكل 13 »

33 . نعرف في المجموعة ك × ك عملية داخلية رمزها ⊗ كما يلي :

(س ، ع) ⊗ (ص ، و) = (س ص ، ع و)

1) هل العملية ⊗ تبديلية ؟ هل هي تجميعية ؟

2) احسب ($-\frac{2}{3}$ ، $\frac{7}{2}$) ⊗ (1 ، 1)

بين أن العنصر (1 ، 1) من ك × ك هو عنصر حيادي للعملية ⊗

3) هل المجموعة ك × ك المزودة بالعملية ⊗ زمرة ؟

4) ك* هي مجموعة الأعداد الناطقة غير المعدومة

بين أن (ك* × ك* ، ×) زمرة تبديلية .

34 . نعرف في المجموعة ك × ك عملية داخلية رمزها + كما يلي :

(س ، ع) ⊕ (ص ، و) = (س + ص ، ع + و)

1) بين أن (0 ، 0) هو عنصر حيادي للعملية ⊕

2) بين أن (ك × ك ، ⊕) زمرة تبديلية .

35 . سـ = { 1 ، 2 ، 3 }

اكتب المجموعة ج (سـ) لأجزاء سـ

1) ما هي خواص عملية الاتحاد في ج (سـ) التي يرمز لها بالرمز ∪ ؟

هل المجموعة ج (سـ) المزودة بالعملية ∪ زمرة ؟

2) نفس السؤال بالنسبة لعملية التقاطع في ج (سـ) التي يرمز لها بالرمز ∩ ؟

36 .. 1) أحسب 10^3 ، 10^4 ؛ $(0,1)^3$ ، $(0,1)^4$

2) بين أن $(0,1)^3 = \frac{1}{10^3}$ ، $(0,1)^4 = \frac{1}{10^4}$

3) أحسب 10^5 ؛ 10^{-5} ، 10^{-7} ؛ 10^{-6} ، $\times 10^{-4}$ ، $10^{-8} \times 10^3$

4) ﻫ ؛ هي مجموعة الأعداد العشرية من الشكل 10 حيث ﻫ عدد صحيح . أرفق بكلّ ثنائية ($10^{ه}$ ؛ $10^{و}$) من ﻫ × ﻫ الجداء $10^{ه} \times 10^{و}$ للعددين العشريين $10^{ه}$ و $10^{و}$

بين أنك عرفت هكذا عملية داخلية في ﻫ إن هذه العملية هي الضرب في ﻫ ويرمز لها بالرمز ×

بين أنّ (ﻫ) ، ×) زمرة تبديلية

37 . ﻫ = { أ ، ب ، ج } . نزود ﻫ بالعملية الداخلية * بحيث تكون (ﻫ ، *) زمرة .

إن جدول الشكل 14 يعرف العملية * .

1) ما هو العنصر الحيادي لهذه العملية ؟

2) هل الزمرة (ﻫ ، *) تبديلية ؟

3) ما هو نظير كل من أ ، ب ، ج ؟

4) أحسب (أ * ب) * أ ، (أ * ب) * (ج * أ)

(أ * ج) * ج ، (ج * أ) * ج

★	أ	ب	ج
أ	أ	ب	ج
ب	ب	ج	أ
ج	ج	أ	ج

« شكل 14 »

الأعـداد الحقيـقية	2

1 ـ النشر العشري غير المحدود

1.1. مقلوب عدد عشري غير معدوم

تعرف أن كل عدد عشري هو عدد ناطق

وتعرف أيضا أن :

من أجل كل عدد ناطق س غير معدوم يوجد عدد ناطق سَ بحيث

س سَ = سَ س = 1

إن العدد الناطق سَ هو **مقلوب** س بالنسبة للضرب في ك

تلاحظ أن سَ هو حاصل قسمة العدد الناطق 1 على العدد الناطق س غير المعدوم .

تستنتج أن كل عدد عشري غير معدوم له مقلوب بالنسبة للضرب في ك

هل أن هذا المقلوب هو دائما عدد عشري ؟

تعرف أن :

العدد الناطق الذي ممثله غير القابل للاختزال $\frac{أ}{ب}$ هو عدد عشري إذا أو فقط اذا

لم يظهر في تحليل | ب | إلى جداء عوامل أولية إلا العاملين 2 و 5 .

أوجد المقلوب سَ للعدد العشري $\frac{3}{10^3}$ بالنسبة للضرب في ك

يكون لديك : سَ $\times (3 \times 10^{-3}) = 1$

ومنه : سَ $= \frac{1}{3 \times 10^{-3}} = \frac{10^3}{3}$

سَ ليس عددا عشريا .

تقول إنه ليس للعدد العشري 3×10^{-3} مقلوبا في ع مجموعة الأعداد العشرية .

وتستنتج أن مقلوب عدد عشري بالنسبة للضرب في ك ليس حتما عددا عشريا .

أ) هل لكل من الأعداد العشرية الآتية مقلوبا في ع ؟

$\frac{5}{10^3}$ ، $\frac{32}{10^2}$ ؛ 45×10^{-1} ؛ -4×10^{-1} ؛ 0 , 625 ؛

1 , 2 ؛ -600 ؛ 25×10^2 ؛ -8×10^{-2} ؛ 0 , 52 ؟

ب) بين أن 25 ، 6 له مقلوبا في ع .

ما هو هذا المقلوب ؟

2.1. المقلوب المقرب لعدد عشري :

رأيت أن 3×10^{-3} ليس له مقلوب في ع .

ما هو حاصل القسمة المقرب لوحدة بالنقصان للعدد 1 على 3×10^{-3} ؟

تلاحظ أنه هو حاصل القسمة المقرب الى وحدة بالنقصان للعدد 1000 على 3

تجد : 333 (شكل 1)

تقول إن 333 هو **المقلوب المقرب إلى وحدة بالنقصان للعدد العشري 3×10^{-3}**

1000	3
100	
10	333,33
10	
1	

« شكل 1 »

ما هو حاصل القسمة المقرب الى $\frac{1}{10}$ بالنقصان

للعدد 1 على 3×10^{-3} ؟

تجد : 333,3 (شكل 1)

تقول إن 333,3 هو **المقلوب المقرب إلى $\frac{1}{10}$ بالنقصان** للعدد 3×10^{-3}

ما هو الحاصل المقرب إلى $\frac{1}{100}$ بالنقصان للعدد 1 على 3×10^{-3} ؟

تجد : 333,33 (شكل 1) .

تقول إن 333,3 هو **المقلوب المقرب إلى** $\frac{1}{10^2}$ **بالنقصان** للعدد 3×10^{-3} .

يمكنك أن تواصل هكذا لتجد المقلوبات المقربة بالنقصان إلى $\frac{1}{10^3}$ ،

$\frac{1}{10^4}$ ، $\frac{1}{10^5}$ الخ ... للعدد 3×10^{-3}

تجد على التوالي : 333,333 ، 333,3333 ، 333,33333 ... الخ

هل للعدد 7×10^{-2} مقلوب في ع ؟ لا

ما هو حاصل القسمة المقرب إلى وحدة بالنقصان للعدد 1 على 7×10^{-2} ؟

تجد : 14 (شكل 2)

تقول إن 14 هو **المقلوب المقرب إلى وحدة بالنقصان** للعدد 7×10^{-2}

100	7
30	
20	14,2857
60	
40	
50	
1	

« شكل 2 »

بالبحث عن حواصل القسمة المقربة بالنقصان للعدد 1 على 7×10^{-2} إلى

$\frac{1}{10}$ ، $\frac{1}{100}$ ، $\frac{1}{10^3}$ ، $\frac{1}{10^4}$ تجد على الترتيب :

14,2 ؛ 14,28 ؛ 14,285 ؛ 14,2857

تقول إن :

14,2 هو **المقلوب المقرب إلى** $\frac{1}{10}$ **بالنقصان** للعدد 7×10^{-2}

14,28 هو المقلوب المقرب إلى $\frac{1}{100}$ بالنقصان للعدد 7×10^{-2}

14,285 هو المقلوب المقرب إلى $\frac{1}{10^3}$ بالنقصان للعدد 7×10^{-2}

14,2857 هو المقلوب المقرب إلى $\frac{1}{10^4}$ بالنقصان للعدد 7×10^{-2}

من أجل كل عدد طبيعي ن يمكنك أن تجد حاصل القسمة المقرب إلى $\frac{1}{10^{ن}}$ للعدد 1 على 7×10^{-2}

هذا الحاصل هو **المقلوب المقرب إلى** $\frac{1}{10^{ن}}$ **للعدد** 7×10^{-2}

تقول إن الأعداد العشرية : 14 ؛ 14,2 ؛ 14,28 ؛ 14,285 ؛ 14,2857 ؛ 14,28571 ؛ 14,285714 ... تشكل **متتالية عشرية غير محدودة** .

تعريف :

ع عدد عشري موجب غير معدوم ، ن عدد طبيعي . **المقلوب المقرب إلى** $\frac{1}{10^{ن}}$ **بالنقصان** للعدد العشري ع هو حاصل القسمة المقرب إلى $\frac{1}{10^{ن}}$ بالنقصان للعدد 1 على ع .

• س عدد عشري سالب غير معدوم ، ن عدد طبيعي . إن المقلوب المقرب إلى $\frac{1}{10^{ن}}$ بالنقصان للعدد س هو العدد العشري السالب الذي قيمته المطلقة هي المقلوب المقرب إلى $\frac{1}{10^{ن}}$ بالنقصان للعدد العشري | س |

أ) أوجد من أجل كل عدد عشري من الأعداد التالية مقلوبه المقرب إلى 10^{-4} بالنقصان : 4,28 ؛ 1,54 ؛ 0,36 ؛ 12,4 ؛ 0,254

ب) أوجد المقلوب المقرب بالنقصان إلى 10^{-1} للعدد 0,327

أوجد المقلوب المقرب بالنقصان إلى 10^{-2} للعدد 0,317

أوجد المقلوب المقرب بالنقصان إلى 10^{-3} للعدد 0,327

3.1. النشر العشري غير المحدود :

لاحظ في الفقرة السابقة أن البحث عن المقلوب المقرب لعدد عشري يمكنه أن يصل بك إلى كتابة قدر ما تشاء من الأرقام بعد الفاصلة .

شاهد الكتابات الآتية : ... 648,572046 ؛ – ... 15,476213 ؛

... 333,3333 ؛ – ... 2,343434 ؛ ... 7,80000 ؛

... 14,285714 2857142857 .

في كل من الكتابات السابقة تعبر النقط الثلاث ... على أنه يمكن متابعة كتابة أرقام أخرى بدون توقف . وبما أنه لا يمكنك أن تكتب عددا غير منته من الأرقام بعد الفاصلة تقتصر على كتابة بعض منها ثم تضع ثلاث نقط .

تقول إن :

كل كتابة من الكتابات السابقة هي **نشر عشري غير محدود**

ليس للنشرين العشريين غير المحدودين ... 468,572046 و ـ ... 15,476213 أي خاصية .

تلاحظ أنه في الأربع النشرات العشرية غير المحدودة الأخرى تتكرر الأعداد 34 ، 3 ، 0 ، 142857 دوما .

لكي تشير إلى هذا تضع خطا تحت آخر عدد 34 وآخر عدد 3 وآخر عدد 0 ، وآخر عدد 142857 مكتوب قبل النقط الثلاث ...

وتقول إن كل نشر من النشرات العشرية غير المحدودة – ...2,343434 ؛ ... 333,3333 ... 7,80000 ؛ ... 14,2857 142857142857 **نشر دوري** .

تقول إن :

34 ، 3 ، 0 ، 142857 هي **الأدوار** على الترتيب للنشرات الأربعة غير المحدودة السابقة .

تلاحظ أن كل نشر من النشرين العشريين غير المحدودين ...648,572046 و ...15,476213 ليس دوريا .

انطلاقا من النشر العشري غير المحدود ...648,572046

تحصل على الأعداد العشرية :

648,5 ؛ 648,57 ؛ 648,572 ؛ 648,5720 ؛ 648,57204 الخ ...

انطلاقا من النشر العشري غير المحدود الدوري **3,48000...**

تحصل على الأعداد العشرية 3,4 ؛ 3,48 ؛ 3,480 ؛ 3,4800 الخ ...

تلاحظ أنه إذا لم تجد ابتداء من رتبة معينة بعد الفاصلة إلا أصفاراً

فعندئذ الأعداد العشرية المحصل عليها متساوية .

لديك : 3,4 ؛ 3,48 = 3,480 = 3,4800 .

تستنتج أن كل عدد عشري يمكن أن يكتب على شكل نشر عشري غير محدود .

لديك :

$142 \times 10^{2} = 14200 = 14200,000...$

$-28 \times 10^{-2} = -0,028 = -0,028000...$

يمكنك أن تكتب $-0,02800... = -(0,02800...)$

أ) أكتب العشرين عشرية أولى للنشرات العشرية غير المحدودة الدورية الآتية :

3,412867**<u>412867</u>**... ؛ 12,827**<u>27</u>**... ؛ 4,**<u>5238</u>**...

ب) أكتب بأقل ما يمكن من الأرقام النشرات العشرية غير المحدودة الدورية الآتية :

18,234234234**<u>234</u>**... ؛ – ...57,682828828**<u>828</u>** .

جـ) أكتب على شكل نشر عشري غير محدود كل من الأعداد العشرية الآتية :

0,25 ؛ – 5428 ؛ 1 ؛ – 8 ؛ 2000

-248745×10^{-4} ؛ 783508×10^{-7} ؛ 1398017×10^{-6}

---

2 ـ مجموعة الأعداد الحقيقية

1.2. مفهوم العدد الحقيقي :

شاهد النشرين العشرين غير المحدودين التاليين :

6,3500<u>0</u>... و 6,3499<u>9</u>...

تلاحظ أن 6,3500<u>0</u>... هو نشر عشري غير محدود للعدد العشري 6,35

احسب الفروق الآتية : 6,350 – 6,349 ؛ 6,3500 – 6,3499 ؛

6,35000 – 6,34999 .

تحصل على : 6,350 − 6,349 = 0,001 ؛ 6,3500 − 6,3499 =
0,0001 ؛ 635000 − 634999 = 0,00001 .

تلاحظ أنه كلما كررت كتابة العدد 9 كلما صغر الفرق الذي تحصل عليه وهذا يسمح لك أن تعتبر النشرين العشريين غير المحدودين...**6,35000** و ...**6,349999** كتمثيلين لنفس العدد العشري وهو 6,35 . تقبل أن كل عدد عشري يمكن أن يمثل بنشرين عشريين غير محدودين بحيث دور أحدهما 0 ودور الآخر 9 .

ولا يستعمل هذا الأخير غالبا .

تقول إن :

النشر العشري غير المحدود الذي ليست دورته 9 يمثل **عددا حقيقيا** أو أنه عدد حقيقي .

تذكر بأن كل عدد حقيقي يمثل :

- اما بنشر عشري غير محدود دوري ليس دوره 9 .
- اما بنشر عشري غير محدود وغير دوري .

تسم ح مجموعة الأعداد الحقيقية .

تعرف أن كل عدد عشري يمكن أن يكتب على شكل نشر عشري غير محدود

تستنتج أن كل عدد عشري هو عدد حقيقي :

تستنتج أن : ع ⊃ ح

وتلاحظ أن : ط ⊃ ص ⊃ ع ⊃ ح

أ) ما هو العدد العشري الذي يمثل بالنشرين العشريين غير المحدودين :

− ...8,6000 و − ...8,5999

ب) نفس السؤال من أجل النشرين العشريين غير المحدودين :

...24,10800 و ...24,10799 .

ج) عوض النشر العشري غير المحدود − ...17,899 بنشر عشري غير محدود يمثل نفس العدد العشري .

د) نفس السؤال من أجل كل من النشرين العشريين غير المحدودين :

...0,00999 و − ...4,4599

2.2. الأعداد الناطقة والأعداد الصماء :

تقبل أن :

- كل نشر عشري غير محدود دوري ليس دوره 9 هو حاصل قسمة عدد صحيح أعلى عدد صحيح غير معدوم ب .
- لا يمكن لأي نشر عشري غير دوري أن يكون حاصل قسمة عدد صحيح أ على عدد صحيح غير معدوم ب .

تعرف أن :

كل عدد ناطق هو حاصل قسمة عدد صحيح على عدد صحيح غير معدوم .

تستنتج أن كل عدد ناطق يمثل بنشر عشري غير محدود دوري ليس دوره 9

تستنتج أن كل عدد ناطق هو عدد حقيقي وان كل نشر عشري غير دوري يمثل عددا حقيقيا ليس ناطقا .

لديك إذن : ك ⊂ ح و ك ≠ ح

تستنتج أن : ط ⊂ ص ⊂ ع ⊂ ك ⊂ ح

تقول إن : العدد الحقيقي الذي ليس ناطقا هو **عدد أصم** .

تلاحظ أن كل عدد أصم يمثل بنشر عشري غير محدود وغير دوري .

أنت تعرف المتتالية العشرية غير المحدودة التالية :

3 ؛ 3,1 ؛ 3,14 ؛ 3,141 ؛ 3,1415 ؛ 3,14159 ؛ 3,1415926 ؛ 3,1415926 ؛ ...

تعطيك هذه المتتالية العشرية بداية نشر عشري غير محدود وغير دوري يمثل عددا أصما تعرفه وهو العدد : π

أ) ما هي من بين النشرات العشرية غير المحدودة الآتية النشرات التي تمثل عددا ناطقا وما هي التي تمثل عددا أصما .

46,2305... ؛ − 18,4351... ؛ 0,04666... ؛

25,1263... ؛ 10,50$\underline{0}$... ؛ 2,71828... ؛ − 0,31831...

1,213$\underline{13}$... ؛ − 1,41421... ؛ 0,70711... ؛ 1,73205... ؛

ب) أوجد حاصل القسمة المقرب إلى $\frac{1}{10^{15}}$ بالنقصان للعدد 1 على 3

أوجد حاصل القسمة المقرب إلى $\frac{1}{10^{15}}$ بالنقصان للعدد 3 على 7

أوجد حاصل القسمة المقرب إلى $\frac{1}{10^{15}}$ بالنقصان للعدد 27 على 8

أوجد حاصل القسمة المقرب إلى $\frac{1}{10^{15}}$ بالنقصان للعدد 22 على 7

أكتب كلا من هذه الحواصل على شكل نشر عشري غير محدود .

3.2. الأعداد الحقيقية الموجبة والأعداد الحقيقية السالبة :

النشر العشري غير المحدود ...648,572046 يمثل عددا حقيقيا س .

النشر العشري غير المحدود – ...15,476213 يمثل عددا حقيقيا ع .

إذا كتبت الأرقام الأولى على يمين الفاصلة تحصل على الأعداد العشرية التي هي **قيم مقربة** للعددين س ، ع .

تلاحظ أن العدد العشري 648,572 موجب .

تقول إذن أن العدد الحقيقي س **موجب**

يمكنك أن تكتب + (...648,572046) أو + ...648,572046

وتلاحظ أن العدد العشري – 15,476 سالب .

تقول إذن أن العدد الحقيقي ع **سالب**

يمكنك أن تكتب – (...15,476213) أو – ...15,476213

وتقول أن العدد الحقيقي 0 هو العدد الحقيقي **المعدوم**

ترمز إلى مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة أو المعدومة بالرمز ح + .

ترمز إلى مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة أو المعدومة بالرمز ح – .

ترمز إلى مجموعة الأعداد الحقيقية غير المعدومة بالرمز ح*

ترمز إلى مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة غير المعدومة بالرمز ح *+ .

ترمز إلى مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة غير المعدومة بالرمز ح *– .

تقول إن :

ح *+ هي مجموعة **الأعداد الحقيقية الموجبة تماما** .

ح *– هي مجموعة **الأعداد الحقيقية السالبة تماما** .

إذا أردت أن تقول أن « العدد الحقيقي س موجب أو معدوم » يمكنك أن تقول فقط أن « العدد الحقيقي س موجب » .

تلاحظ أن :

كل عدد حقيقي إما أن يكون موجبا تماما ، واما أن يكون سالبا تماما واما أن يكون معدوما .

تقول عن أعداد حقيقية انها **من نفس الطبيعة** إذا كانت اما كلها موجبة تماما واما كلها سالبة تماما واما كلها معدومة .

تلاحظ أن :

عددين حقيقيين غير معدومين ومن نفس الطبيعة لهما نفس الإشارة .

عددين حقيقيين غير معدومين ومن طبيعتين مختلفتين لهما اشارتان مختلفتان .

تقول إن هذين العددين الحقيقيين **متعاكسان بالإشارة** .

أ) أوجد المجموعات الآتية ؟

$ح^{+} \cup ح^{+} \cap ح^{-}$ ؛ $ح^{*+} \cap ح^{*-}$

$ح^{*} \cap ح^{+} \cap ح^{-}$.

ب) بين أن المجموعة $\{ح^{*+} ؛ ح^{*-} ؛ \{0\}\}$ تجزئة للمجموعة ح .

التمارين

1 . أكتب كلا من الأعداد العشرية التالية على شكل جداء عدد صحيح بقوة للعدد 10 :

1) 46000 ، $-15000\,000$ ، 25002000 ، $-12{,}4$ ، 0,54001

2) $\frac{153}{10\,000\,000}$ ، $\frac{-7}{10^{-4}}$ ، $\frac{0{,}48}{1000\,000}$ ، $-\frac{9}{10^{5}}$

3) $\frac{6{,}75}{10^{8}}$ ، $-\frac{84{,}7}{10^{32}}$ ، $\frac{-0{,}04025}{10^{10}}$

2 . أحسب كلا من الجداءات التالية :

1) $2{,}4 \times 10^{-3}$ ، $-0{,}15 \times 10^{-2}$ ، 14×10^{-5}

2) $4{,}3 \times 10^{4}$ ، $-2{,}78 \times 10^{-4}$ ، $10{,}42 \times 10^{-5}$

3 . احسب كلا من الأعداد العشرية التالية :

1) $(-42 \times 10^{-3}) + (26 \times 10^{-2})$ ؛ $(-54 \times 10^{3}) + (34 \times 10^{5})$.

$(-8,7) \times 10^{-2} + (156 \times 10^{-3})$ ؛

$(7,2 \times 10^{-2}) + (4,5 \times 10^{-3}) + ((-5,62) \times 10^{-2})$

2) $(46 \times 10^{3}) - (15 \times 10^{2})$ ،

$(2,8 \times 10^{-2} - 14 \times 10^{-3}) - (56 \times 10^{-1})$.

$58 \times 10^{-3} - [(-27) \times 10^{-4} - (1,8) \times 10^{-2}]$.

4 . احسب كلا من الأعداد العشرية التالية :

1) $(2405 \times 10^{-2}) \times (-1442 \times 10^{-3})$ ،

$(-45 \times 10^{-2}) \times (103 \times 10^{-3})$.

2) $8 \times 10^{-2} (15 \times 10^{-3} + 24 \times 10^{-2})$ ،

$(-72) \times 10^{-3} (35 \times 10^{-2} - 17 \times 10^{-1})$.

5 . احسب نظير كل من الأعداد العشرية التالية :

1) 5×10^{-3} ، -9×10^{5} ، 10^{-8}

2) $0,75 \times 10^{5}$ ، $-2,4 \times 10^{-3}$ ، $-3,7 \times 10^{4}$

6 . 1) احسب الجداء 15625×64

2) هل لكل من الأعداد العشرية التالية مقلوب في مجموعة الأعداد العشرية ع

15625 ، -1.5625 ، 15,625 ، 640 ، -64000 ، 0,0064 ؟

3) أعط في حالة ما إن وجد مقلوب كل من الأعداد العشرية السابقة .

7 . أ عدد عشري يقبل مقلوباً أ' في مجموعة الأعداد العشرية ع

ما هو مقلوب كل من الجداءات التالية في ع ؟

100 × أ ، 1000 × أ ، (0,001) × أ ؟

8 . أكتب على شكل قوة للعدد 10 كلا من الأعداد العشرية التالية :

100 000 ، 0,0001 ، 0,001 ، 0,000 001 ، 10 000 000 000

2) ما هو مقلوب كل من الأعداد العشرية السابقة في المجموعة ع ؟

9 . أوجد من بين الأعداد العشرية التالية ؛ الأعداد التي تقبل مقلوب في المجموعة ع ثم أحسب هذا المقلوب .

-16 ، $\frac{25}{10^{4}}$ ، 54×10^{-3} ، -12×10^{-2} ، 0,24 ، -1200 ، 0.725 ،

-40×10^{-4}

10 . س = { 6,25 ، 0.25 ، – 4 ، 0,16 ، 4 ، 1,5 ، – 0,0016 ، 0,666 ، – 62.5 ، 1 }

اعط بيان العلاقة « ... هو مقلوب ... » في س .

11 . م = { 8 ، 9 ، 10 ، 11 ، 12 }

احسب المقلوب المقرب إلى 10^{-3} بالنقصان لكل عنصر من م .

12 . م مجموعة جزئية من ع مجموعة الأعداد العشرية بحيث :

م = { س | س ∋ ع ، 4,56 ⩽ س ⩽ 5,84 } .

1) عين س مجموعة عناصر م التي تكتب على الشكل ا × 10^{-1} حيث ا هو عدد طبيعي .

2) احسب من أجل كل عنصر من س مقلوبه المقرب إلى 10^{-2} بالنقصان ثم المقلوب المقرب إلى 10^{-3} بالنقصان .

13 . 1) أوجد المقلوب المقرب إلى 10^{-3} بالنقصان لكل من الأعداد العشرية التالية :

6 ؛ 14,3 ؛ 0,44 .

2) أوجد المقلوب المقرب إلى 10^{-3} بالنقصان لكل من الأعداد العشرية التالية :

– 6 ؛ – 14.3 ؛ – 0,44 .

14 . أوجد المقلوب المقرب لوحدة بالنقصان ، ثم المقرب إلى 10^{-1} بالنقصان ، ثم المقرب إلى 10^{-2} بالنقصان ، ثم المقرب إلى 10^{-3} بالنقصان ثم المقرب إلى 10^{-4} بالنقصان لكل من الأعداد العشرية التالية :

3,72 ؛ 14,83 ؛ 15,48 ؛ 0,431 .

15 . 1) أوجد المقلوب المقرب إلى 10^{-n} بالنقصان للعدد العشري 23,74 وهذا من أجل القيم التالية للعدد الطبيعي ن : ن = 1 ، ن = 2 ، ن = 3 ، ن = 4 ، ن = 5

2) نفس السؤال بالنسبة لكل من الأعداد العشرية التالية :

– 12,47 ؛ 7,11 ؛ 42,33 ؛ – 21,05 .

16 . أكتب بعشرة أرقام بعد الفاصلة كلا من النشرات العشرية غير المحدودة التالية :

43,00**104**.. ؛ – 248,**54**... ؛ 0,08471... ؛ – 8,020...

17 . أكتب العشرين رقم العشرية الأولى لكل من النشرات العشرية غير المحدودة التالية :

14,52427**427**... ؛ – (52,7**1880**...) ؛ 0,20**1982**...

18 . 1) أكتب العشرين رقم العشرية الأولى للنشر العشري غير المحدود التالي :

2.583346**346**...

2) ما هي الرتب المتتالية بعد الفاصلة للرقم 3 ؟ للرقم 4 ؟ للرقم 6 ؟

19 . 1) ما هي الرتب المتتالية لكل رقم من دور النشر العشري غير المحدود التالي :

؟ 62,47258 47258...

2) أكتب أرقام النشر العشري غير المحدود السابق من الرتبة 110 حتى الرتبة 120 .

3) أجب على نفس الأسئلة من أجل النشر العشري غير المحدود التالي :

- 15,8421725...

20 . هل للنشرين العشريين غير المحدودين التالين نفس الدور .

18,653 124 517 5175... ، 4,517517...

21 . س هو النشر العشري غير المحدود بحيث س = ... جـ ب أ 26,7

1) عين الأرقام العشرية أ ، ب ، جـ علما بأن الرقم العشري الذي يأتي في المرتبة 391 هو العدد 8 . وأن الرقم العشري الذي يأتي في المرتبة 536 هو العدد 3 وأن الرقم العشري الذي يأتي في المرتبة 642 هو 7 .

2) أكتب س بالأرقام العشرية الخمسة عشر الأولى

22 . س هو النشر العشري غير المحدود بحيث س = − (... د حـ ب أ 36,5)

الرقم العشري ذو المرتبة 32 هو 7 ، والرقم العشري ذو المرتبة 193 هو 5 والرقم العشري ذو المرتبة 571 هو 2 ، والرقم العشري ذو المرتبة 8242 هو 9 .

1) أوجد الأرقام العشرية أ ، ب ، حـ ، د .

2) أكتب س بالأرقام العشرية العشرين الأولى

23 . س هو النشر العشري غير المحدود بحيث س = ... هـ د حـ ب أ 32,

الأرقام العشرية ذات المرتبة 18 ، 52 ، 251 ، 1000 ، 9999 هي على التوالي :

. 3 ، 6 ، 4 ، 7 ، 7

أ) أوجد الأرقام العشرية أ ، ب ، جـ ، د ، هـ .

ب) أكتب س بالأرقام العشرية العشرين الأولى

24 . لاحظ جيداً طريقة تشكيل النشر العشري غير المحدود وغير الدوري التالي :

3,212 112 1112...

1) أكمل كتابة هذا النشر العشري غير المحدود حتى الرقم الذي يأتي في المرتبة 30 بعد الفاصلة .

2) ما هي الرتب المتتالية للرقم 2 في هذا النشر ؟

3) ما هو الرقم الذي يأتي في المرتبة 45 بعد الفاصلة ؟

ما هو الرقم الذي يأتي في المرتبة 50 بعد الفاصلة ؟

25 . لاحظ جيدا طريقة تشكيل النشر العشري غير المحدود وغير الدوري التالي :
- (...5,604 6604 66 604 666 604)
1) أكمل كتابة هذا النشر العشري غير المحدود حتى الرقم الذي يأتي في المرتبة 30 بعد الفاصلة .
2) ما هي الرتب المتتالية للرقم 4 في هذا النشر ؟
3) أكتب أرقام هذا النشر من الرتبة 60 حتى الرتبة 75 بعد الفاصلة .

26 . القسم الصحيح لنشر عشري غير محدود هو 2 والرقم ذو المرتبة ن من هذا النشر هو باقي قسمة ن على 5 .
1) أكتب هذا النشر حتى الرقم الذي يأتي في المرتبة 15 بعد الفاصلة .
2) هل هذا النشر دوري ؟ إذا كان الأمر كذلك ما هو عدد أرقام دوره ؟

27 . 12 هو القسم الصحيح لكل من النشريين العشريين غير المحدودين س ، ص .
الرقم ذو المرتبة ن للنشر س هو باقي قسمة ن على 4 .
والرقم ذو المرتبة ن للنشر ص هو باقي قسمة ن على 6 .
1) أكتب كلا من هذين النشريين حتى الرقم الذي يأتي في المرتبة 15 بعد الفاصلة .
2) هل هذان النشران دوريان ؟ إذا كان الأمر كذلك فما هو عدد أرقام كل دور ؟
3) ع هو نشر عشري ثالث غير محدود حيث قسمه الصحيح يساوي 12 .
الرقم ذو المرتبة ن للنشر ع هو 8 لما تكون الأرقام ذات المرتبة ن للنشرين س ، ص مختلفة .
الرقم ذو مرتبة ن للنشر ع يكون مساويا للأرقام ذات المرتبة ن للنشرين س ، ص عندما يكون هذان الرقمان الأخيران متساويين .
أكتب ع حتى الرقم الذي يأتي في المرتبة 15 بعد الفاصلة .
هل ع دوري ؟
إذا كان الأمر كذلك فما هو عدد أرقام دوره ؟

28 . 1) احسب كلا من الفروق التالية :
12,615 − 12,614 ، 12,6150 − 12,6149 ،
12,61500 − 12,61499 ، 12,615000 − 12,614999 .
12,615000 − 12,6149999
12,61500000 − 12,61499999 .
2) ما هو العدد الحقيقي المعرف بالنشريين العشريين غير المحدودين التاليين :
$12,6150\underline{0}...$ ، $12,6149\underline{9}...$

29 . 1) احسب كلا من الفروق التالية :

$0{,}0010 - 0{,}0009$ ؛ $0{,}00100 - 0{,}00099$ ؛

$0{,}001000 - 0{,}000999$ ، $0{,}0010000 - 0{,}0009999$ ؛

$0{,}00100000 - 0{,}00099999$

2) ما هو العدد الحقيقي المعرف بالنشرين العشريين غير المحدودين التاليين :

$0{,}00\underline{10}\ldots$ ؛ $0{,}000\underline{9}\ldots$ ؟

30 . 1) ما هو العدد الحقيقي المعرف بالنشرين العشريين غير المحدودين التاليين :

$7{,}142\underline{00}\ldots$ ؛ $7{,}14199\underline{9}\ldots$

2) ما هو العدد الحقيقي المعرف بالنشرين العشريين غير المحدودين التاليين :

$-(23{,}5010\underline{0}\ldots)$ ؛ $-(23{,}5009\underline{9}\ldots)$

31 . 1) استبدل النشر العشري غير المحدود $54{,}219\underline{9}\ldots$ بالنشر العشري الذي يعرّف نفس العدد العشري .

2) نفس السؤال من أجل كل من النشرات العشرية غير المحدودة التالية :

$-(4{,}52\underline{99}\ldots)$ ؛ $-(10{,}08\underline{99}\ldots)$ ؛ $1{,}00\underline{99}\ldots$

32 . من بين النشرات العشرية التالية ، ما هي التي تمثل نفس العدد الحقيقي :

$-(3{,}1\underline{41}\ldots)$ ؛ $-(3{,}\underline{141}\ldots)$ ؛ $-(3{,}14\underline{14}\ldots)$ ، $3{,}1\underline{41}$ ،

$3{,}1414\underline{14}\ldots$ ؛ $3{,}141\underline{141}\ldots$ ؛ $-(3{,}14114114\underline{1}\ldots)$.

33 . 1) من بين النشران العشريان غير المحدودين التاليين ما هو الذي يمثل عدد حقيقي :

$24{,}415999\underline{0}\ldots$ ؛ $24{,}415999\underline{9}\ldots$ ؟

2) استبدل النشر $24{,}415999\underline{9}\ldots$ بالنشر العشري غير المحدود الذي يمثل نفس العدد العشري .

3) هل النشر العشري غير المحدود الذي حصلت عليه في السؤال الثاني هو النشر $24{,}41599\underline{90}\ldots$.

34 . 1) هل النشران العشريان غير المحدودين : $0{,}1714\underline{14}\ldots$ و $0{,}17\underline{414}\ldots$ يمثلان نفس العدد الحقيقي ؟

2) نفس السؤال بالنسبة للنشرين العشريين غير المحدودين التاليين :

$0{,}1714\underline{14}\ldots$ و $0{,}171\ 414\ \underline{1414}\ldots$

35 . من بين النشرات العشرية غير المحدودة التالية ؛ ما هي التي تمثل عددا ناطقا . وما هي التي تمثل عدداً أصما .

$2{,}054\underline{0}\ldots$ ؛ – ($14{,}514551455514\ldots$) ؛ $0{,}09909\underline{0}\ldots$ ؛

– ($0{,}107\ 1107\ 11107\ 111107\ldots$) ؛ $28{,}542\underline{42}\ldots$ ؛ $8{,}001\underline{01}\ldots$ ؛

– ($10{,}584326\ldots$) .

36 . 1) عين المجموعات التالية :

ح ∩ ك ، ح ∪ ك ؛ ح ∩ ع ؛ ح ∩ ك ؛

ح ∩ ك$^{-}$ ؛ ح* ∩ ك* ؛ ح$^{*+}$ ∩ ك$^{*-}$ ؛ ح$^{-}$ ∩ ك$^{+}$.

2) هل المجموعة { ح$^{*+}$ ؛ ك$^{*-}$ ، { 0 } } تجزئة للمجموعة ح ؟

3	الجمع في ح والطرح في ح علاقة الترتيب في ح

1 ـ الجمع في ح والطرح في ح

1.1 . مجموع عددين حقيقيين :

س و ع عددان حقيقيان بحيث :

س = ...8,436 625 781 ؛ ع = ...2,817**214**

يمكنك أن ترفق بكل من العددين الحقيقيين المتتالية العشرية المناسبة لكل منهما

بالنسبة للعدد س تحصل على المتتالية العشرية $س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ ...

بحيث : $س_1 = 8$ ؛ $س_2 = 8,4$ ؛ $س_3 = 8,43$ ؛ $س_4 = 8,436$ ؛

$س_5 = 8,4365$ ؛ الخ ...

بالنسبة للعدد ع تحصل على التتالية العشرية $ع_1$ ، $ع_2$ ، $ع_3$ ، ... بحيث :

$ع_1 = 2$ ؛ $ع_2 = 2,8$ ؛ $ع_3 = 2,81$ ؛ $ع_4 = 2,817$ ؛ $ع_5 = 2,8172$ ؛ الخ...

- لديك : $8 \leqslant س_1 < 9$ و $2 \leqslant ع_1 < 3$

ومنه $10 \leqslant س_1 + ع_1 < 12$

- لديك $8,4 \leqslant س_2 < 8,5$ و $2,8 \leqslant ع_2 < 2,9$

ومنه $11,2 \leqslant س_2 + ع_2 < 11,4$

وتستنتج أن : $11 \leqslant س_2 + ع_2 < 12$

تقول إن هذه الكتابة **حصر من الرتبة 0** لِ $س_2 + ع_2$.

- لديك : $8,43 \leqslant س_3 < 8,44$ و $2,81 \leqslant ع_3 < 2,82$

ومنه $11,24 \leqslant س_3 + ع_3 < 11,26$

تستنتج أن : $11,2 \leqslant س_3 + ع_3 < 11,3$

تقول إن هذه الكتابة **حصر من الرتبة 1** لِ : $س_3 + ع_3$

- لديك $8,36 \leqslant س_4 < 8,437$ و $2,817 \leqslant ع_4 < 2,818$

ومنه $11,253 \leqslant س_4 + ع_4 < 11,255$

تستنتج أن : $11,25 \leqslant$ س$_4$ + ع$_4$ $< 11,26$

حصلت هكذا على حصر من الرتبة 2 لِ : س$_4$ + ع$_4$

بين أن $11,253 \leqslant$ س$_5$ + ع$_5$ $< 11,254$

تحصل على **حصر من الرتبة** 3 لِ : س$_5$ + ع$_5$

تحصل بمتابعة العمل على حصور من رتب أكبر فأكبر .

تحصل هكذا على النشر العشري غير المحدود الذي بدايته 11,253

هذا النشر العشري غير المحدود يمثل عددا حقيقيا ص

تقول ان العدد الحقيقي ص هو **مجموع** العددين الحقيقيين س وع .

وتكتب : ص = س +ع

أ) بمتابعة البحث السابق أوجد الحصر من الرتبة 4 لِ : س$_6$ + ع$_6$

ثم الحصر من الرتبة 5 لِ : س$_7$ +ع$_7$

ب) قم بنفس البحث المقام به في الفقرة 1.1 مع العددين الحقيقيين س و ع

بحيث : س = $26,5477...$ ، ع = $-$ ($10,5482626...$)

2.1. الجمع في ح :

تقبل أنه يمكنك أن ترفق بكل ثنائية مرتبة (س ، ع) من ح × ح العدد الحقيقي ص الذي هو مجموع العددين الحقيقيين س و ع

تعرف هكذا تطبيقا من ح × ح في ح هو **الجمع في** ح

تعريف :

> إن التطبيق من ح × ح في ح الذي يرفق بكل ثنائية مرتبة (س ، ع) من ح × ح العدد الحقيقي س + ع هو **الجمع في** ح

تلاحظ أن الجمع في ح عملية داخلية في ح

3.1 . الـزمـرة (ح ، +) :

تقبل أن :

- الجمع في ح تبديلي .
- الجمع في ح تجميعي .

ـ العدد الحقيقي 0 هو العنصر الحيادي للجمع في ح

ـ يقبل كل عدد حقيقي نظيرا بالنسبة للجمع في ح ، ويسمى هذا النظير أيضا **معاكس** العدد س ويرمز له بالرمز – س .

تلاحظ أن نظير العدد – س هو س .

تقول إن س و – س **معاكسان** لبعضهما البعض بالنسبة للجمع في ح .

تستنتج من الخواص السابقة أن :

المجموعة ح ، المزودة بالجمع زمرة تبديلية .

4.1 . المساواة والجمع في ح :

س ، ع ، ص أعداد حقيقية

بين أنه :

إذا كان س = ع فإن س + ص = ع + ص

بين أنه :

إذا كان س + ص = ع + ص فإن س = ع

بينت أن :

س = ع إذا وفقط إذا كان س + ص = ع + ص

أ) أعط معاكس كل من الأعداد الحقيقية الآتية :

142,86415... ، – 84,37564... ، – 5,62... ، 24,256...

ب) س ، ع ، ص ، ى أعداد حقيقية بحيث : س = ص ، ع = ى

بين أن : س + ع = ص + ى

5.1 . الطـرح في ح :

• باستعمال طريقة مماثلة لدراسة الطرح في ص و ك ، برهن النظرية الآتية :

نظريـة :

> من أجل كل عددين حقيقيين ا و ب ، يوجد عدد حقيقي واحد فقط د
> بحيث ا + د = ب

تقول إن العدد الحقيقي د هو **فرق** العددين الحقيقيين ا و ب

تكتب د = ا − ب .

لديك : د = ا + (− ب)

• يمكنك أن ترفق بكل ثنائية (ا ، ب) من ح ×ح العدد الحقيقي ا − ب
الذي هو فرق العددين الحقيقيين ا و ب

تعريف :

> ان التطبيق من ح ×ح في ح الذي يرفق بكل ثنائية (ا ، ب) من ح ×ح
> العدد الحقيقي ا − ب هو **الطرح في ح**

تلاحظ أن الطرح في ح هو عملية داخلية في ح

ا) ا و ب عددان حقيقيان بحيث :

ا = − 24,46$\underline{53}$... ، ب = 8,3544...

أوجد حصرا من الرتبة 2 للفرق (− 24,46) − 8,35 ثم للفرق 8,35 − (− 24,46) .

ب) أوجد ، في كل حالة ، النشر العشري غير المحدود الممثل للعدد الحقيقي س

س + 5,66$\underline{6}$... = 7,$\underline{364}$... ؛ − 9,42$\underline{42}$... = 6,3$\underline{22}$ + س

---

2 ـ القيمة المطلقة

1.2 . القيمة المطلقة لعدد حقيقي :

تعرف القيمة المطلقة لعدد حقيقي س بنفس الطريقة التي عرفت بها القيمة المطلقة لعدد صحيح ولعدد ناطق .

تعريف :

القيمة المطلقة لعدد حقيقي س هو عدد حقيقي يساوي س إذا كان س موجبا أو معدوما ويساوي معاكسه – س إذا كان س سالبا .

تذكر أنه :

إذا كان س موجبا أو معدوما فإن | س | = س

إذا كان س سالبا فإن | س | = – س

تذكر أيضا أن :

القيمة المطلقة لعدد حقيقي تكون دائما عددا موجبا أو معدوما .

2.2 . العددان الحقيقيان المتساويان :

تعريف :

يكون عددان حقيقيان متساويين إذا كانا من نفس الطبيعة وكانت لهما نفس القيمة المطلقة .

تعرف أن العددين الحقيقيين من نفس الطبيعة لهما نفس الإشارة .

بين أنه :

– إذا كان عددان حقيقيان من نفس الإشارة ونفس القيمة المطلقة فهما متساويان – إذا كان عددان حقيقيان متعاكسان فلهما نفس القيمة المطلقة . – إذا كان لعددين حقيقيين نفس القيمة المطلقة فإنهما اما متساويان واما متعاكسان .

أ) تا تطبيق من ح في ح+ بحيث : تا (س) = | س |

أوجد : تا (– 18.45) و تا (– ... 2.356)

ب) ما هي مجموعة الأعداد الحقيقية س بحيث | س | = 7,46 ؟

ج) ما هي مجموعة الأعداد الحقيقية س بحيث | س | = س ؟

د) ما هي مجموعة الأعداد الحقيقية س بحيث | س | = – س ؟

---

3 ـ علاقة الترتيب في ح

1.3 . العلاقة « ... أصغر من أو يساوي ... » في ح :

- سـ وع عددان حقيقيان

تعرف أن الفرق سـ – ع هو عدد حقيقي

تعرف أيضاً أن هذا الفرق عدد حقيقي اما موجب تماماً وأما سالب تماماً و إما معدوم .

تعريف :

إن العدد الحقيقي س أصغر من أو يساوي العدد الحقيقي ع إذا كان الفرق ع – س عددا حقيقيا موجبا أو معدوما .

تعرف هكذا علاقة في المجموعة ح وهي :

العلاقة « ... أصغر من أو يساوي ... » التي ترمز لها بـ : « ... ⩽ ... »

تسميها **علاقة التباين** في المجموعة ح

تكتب **التباين بالمعنى الواسع** س ⩽ ع ، تقرأ : س أصغر من أو يساوي ع .

تذكر أن : س ⩽ ع تعني ع – س ∋ ح+

تلاحظ أن : ع – س ∋ ح + تعني س – ع ∋ ح –

تستنتج أن : س ⩽ ع تعني س – ع ∋ ح–

مثلماسبق في صـ و ك يمكنك تعريف علاقة أخرى في ح :

العلاقة « ... أكبر من أو يساوي ... » التي ترمز لها بـ : « ... ⩾ ... »

تذكر أن : س ⩽ ع تعني ع ⩾ س

إذا كان الفرق ع – س عددا حقيقيا موجبا غير معدوم تقول إن س أصغر تماما من ع أو أن ع أكبر تماما من س .

تكتب إحدى المتباينتين **بالمعنى التام** س < ع ، ع > س

تلاحظ أن : س < ع تعني ع – س ∋ ح*+

تذكر أن : س < ع تعني ع > س

- عمليا تتم المقارنة بين عددين حقيقين بمقارنة النشرين العشريين غير المحدودين اللذين يمثلان هذين العددين .

لكي تقارن بين هذين النشرين العشريين غير المحدودين يمكنك أن تقارن بين العددين العشريين الناتجين عن كل واحد منهما بأخذ نفس عدد الأرقام على يمين الفاصلة .

أ) قارن بين : 4,371**82**... و 4,378**78**...
- 26,314**56**... و - 26,31**35**...
6,462167**16**... و 6,462 **167**...

ب) أوجد ثلاثة أعداد حقيقية س ، ع ، ص بحيث يكون :
12.36**36**... < س < ع < ص < 12,363**8**...

---

3 . 2 . خواص العلاقة « ... أصغر من أو يساوي ... » في ح :

بين أن :

العلاقة « ... ≥ ... » في ح علاقة ترتيب

بين أنه :

من أجل كل عددين حقيقيين س ، ع اما س ≥ع وأما ع ≥ س .

تقول إن العلاقة « ... ≥ ... » في ح **علاقة ترتيب كلي** .

3.3 . الطبيعةوالقيمة المطلقة لمجموع عددين حقيقيين :

تقبل أن :

مجموع عددين حقيقيين من نفس الطبيعة هو عدد حقيقي من نفس الطبيعة وقيمته المطلقة هي مجموع قيمتيهما المطلقتين .

وتقبل أيضا أن :

مجموع عددين حقيقيين من طبيعتين مختلفتين هو عدد حقيقي إشارته إشارة العدد ذي أكبر قيمة مطلقة ، وقيمته المطلقة تساوي الفرق بين القيمتين المطلقتين .

أ) أوجد ، في كل حالة ، مجموعة الأعداد الحقيقية س بحيث :

| س − 7,34 | = 8,9 ؛ | س | = | − 2,25 | ؛

| س + 8,56 | = | − 18,271 |

ب) أوجد ، في كل حالة ، طبيعة المجموع س + ع ثم أحسب هذا المجموع .

س = − 12,753 و ع = − 6,33 ؛ س = − 9,531 و ع = 7,36

4.3 . علاقة الترتيب والقيمة المطلقة :

بين أنه :

من أجل كل عددين حقيقيين موجبين س و ع ، س ⩽ ع إذا وفقط إذا | س | ⩽ | ع | .

تقول إن عددين حقيقيين موجبين **مرتبان في** نفس **ترتيب** قيمتيهما المطلقتين .

بين أنه :

يكون العدد الحقيقي س موجبا أو معدوما إذا وفقط إذا كان : س ⩾ 0 يكون العدد الحقيقي س موجبا تماما إذا وفقط إذا كان : س > 0 .

بين أنه :

من أجل كل عددين حقيقيين سالبين س و ع ؛ س ⩽ ع إذا وفقط إذا كان : | س | ⩾ | ع | .

تقول إن عددين حقيقيين سالبين **مرتبان عكس ترتيب** قيمتهما المطلقتين .
بين أنه :

يكون العدد الحقيقي س سالبا أو معدوما إذا وفقط إذا كان س $\leqslant 0$
يكون العدد الحقيقي س سالبا تماما إذا وفقط إذا كان س < 0

بين أن :

كل عدد حقيقي سالب أو معدوم أصغر من أو يساوي كل عدد حقيقي موجب أو معدوم .

أ) س و ع عددان حقيقيان حيث :
(6,25 + س) $\in$ ح$^{*+}$ و (6,25 + ع) $\in$ ح$^{*-}$
قارن بين : س و 6,25 ؛ ع و 6,25 ؛ س و ع
ب) س ، ع ، ص أعداد حقيقية بحيث :
(س + 2,64) $\in$ ح$^{+}$ ؛ (ع + 3,2) $\in$ ح$^{-}$ ؛ (ع − 5) $\in$ ح$^{+}$ ؛
(س − 4,8) $\in$ ح .
قارن بين : س و ع ؛ س و ص ؛ ع و ص .
جـ) قارن في كل حالة بين | س | و | ع | ثم بين س و ع .
س = ...12,712 و ع = − ...8,14 ،
س = ... 51,2148 و ع = − ... 51,214

5.3 . علاقة الترتيب والجمع في ح :

بين أنه :

من أجل كل أعداد حقيقية س ، ع ، ص :
س $\leqslant$ ع إذا وفقط إذا كان : س + ص $\leqslant$ ع + ص .

تقبل أنه :

من أجل كل عددين حقيقيين س و ع .
$|س + ع| \leqslant |س| + |ع|$ ؛ $|س - ع| \leqslant |س| + |ع|$

أ) س ، ع ، ص ، ى أعداد حقيقية بحيث : س $\leqslant$ ص ، ع $\leqslant$ ى
بين أن : س + ع $\leqslant$ ص + ى
ب) قارن في كل حالة بين : $|س + ع|$ و $|س| + |ع|$ ثم بين $|س - ع|$ و $|س| + |ع|$

س = − ...42,15 و ع = ...27,4**72** ؛
س = ... 7,82**13** و ع = ... 10,5**08**

6.3 . حصرعدد حقيقي والقيم المقربة لعدد حقيقي :

س عدد حقيقي بحيث : س = ...3,2545**4**

- لديك : 3 $\leqslant$ س $<$ 4

يمكنك أن تكتب $3 \times 10^{0} \leqslant$ س $< 4 \times 10^{0}$

تحصل على **حصر من المرتبة** 0 للعدد الحقيقي س

تقول ان 3 هي **القيمة المقربة الى وحدة بالنقصان** للعدد الحقيقي س

- لديك : 3,2 $\leqslant$ س $<$ 3,3

يمكنك أن تكتب : $32 \times 10^{-1} \leqslant$ س $< 33 \times 10^{-1}$

تحصل هكذا على حصر من المرتبة 1 للعدد الحقيقي س

تقول إن 3,2 هي **القيمة المقربة الى** $\frac{1}{10}$ **بالنقصان** للعدد الحقيقي س

- لديك : 3,25 $\leqslant$ س $<$ 3,26

يمكنك أن تكتب : $325 \times 10^{-2} \leqslant$ س $< 326 \times 10^{-2}$

تحصل هكذا على حصر من المرتبة 2 للعدد الحقيقي س

تقول إن **3,25 هي القيمة المقربة إلى** $\frac{1}{10^2}$ **بالنقصان** للعدد الحقيقي س

- يمكنك أن تواصل هكذا الى ما لا نهاية البحث عن حصر ذي مرتبة أكبر فأكبر للعدد الحقيقي س

تقبل النظرية الآتية :

نظرية :

من أجل كل عدد حقيقي س ومن أجل كل عدد طبيعي ن يوجد عدد صحيح واحد فقط ا بحيث : $\frac{ا}{10^ن} \leqslant س < \frac{ا + 1}{10^ن}$

تقول إن العدد العشري $\frac{ا}{10^ن}$ هو **القيمة المقربة إلى** $\frac{1}{10^ن}$ **بالنقصان للعدد الحقيقي س** .

أ) أوجد حصرا من الرتبة 3 ، ثم من الرتبة 4 ، ثم من الرتبة 5 للعدد الحقيقي 3,25454...

ب) أوجد حصرا من الرتبة 1 ، ثم من الرتبة 2 ، ثم من الرتبة 5 للعدد الحقيقي − 7,42658... .

جـ) أوجد **القيمة المقربة إلى** $\frac{1}{10^6}$ **بالنقصان** لكل عدد حقيقي من الأعداد التالية : 26,5466... ؛ − 12,54242... ؛ 0,3543543...

7.3 . المجالات في ح :

ا و ب عنصران من ح بحيث : ا ⩽ ب

ع عنصر من ح بحيث : ا ⩽ ع و ع ⩽ ب

يمكنك أن تكتب باختصار : ا ⩽ ع ⩽ ب

تقول إنك قد **حصرت** العدد الحقيقي ع بالعددين الحقيقيين ا و ب .

إن الكتابة ا ⩽ ع ⩽ ب هي حصر للعدد الحقيقي ع .

إن الكتابات ا < ع < ب ، ا ⩽ ع < ب ، ا < ع ⩽ ب هي أيضا حصور للعدد ع

• **المجال المغلق** الذي **حداه** أ و ب هو مجموعة العناصر س من ح
بحيث : $أ \leqslant س \leqslant ب$

ترمز له بالرمز : [أ ، ب] وتقرأه : المجال المغلق أ ب .

يمكنك أن تكتب : [أ ، ب] = { س | س ∈ ح و أ ⩽ س ⩽ ب }

• **المجال المفتوح** الذي **حداه** أ و ب هو مجموعة العناصر س من ح بحيث :
أ < س < ب .

ترمز له بالرمز :] أ ، ب [وتقرأه : مجال مفتوح أ ب

يمكنك أن تكتب :] أ ، ب [= { س | س ∈ ح و أ < س < ب }

• **المجال المغلق على اليمين (أو المفتوح على اليسار)** الذي **حداه** أ و ب هو
مجموعة العناصر س من ح بحيث : أ ⩽ س < ب

ترمز له بالرمز : [أ ، ب [وتقرأه : المجال المغلق على اليمين أ ب

يمكنك أن تكتب : [أ ب [= { س | س ∈ ح ، أ ⩽ س < ب }

• **المجال المغلق على اليسار (أو المفتوح على اليمين)** الذي **حداه** أ و ب
هو مجموعة العناصر س من ح بحيث أ < س ⩽ ب

ترمز له بالرمز] أ ، ب] وتقرأه : المجال المغلق على اليسار أ ب

يمكنك أن تكتب :] أ ، ب] = { س | س ∈ ح و أ < س ⩽ ب }

أ) هل الأعداد الحقيقية الآتية تنتمي الى المجال المغلق : [-4,27 ؛ 3,18]
$- 427 \times 10^{-2}$ ؛ $- 4260 \times 10^{-3}$
3178×10^{-3} ؛ $- 42687 \times 10^{-4}$

ب) هل الأعداد الحقيقية الآتية تنتمي إلى المجال المفتوح] -5,4 ؛ 1,6 [
$- 5389 \times 10^{-3}$ ؛ $- 54 \times 10^{2}$ ؛ 15999×10^{-4} $- 54001 \times 10^{-4}$

ج) أ ، ب ، ج أعداد حقيقية بحيث : أ ⩽ ب ⩽ ج

أوجد [أ ، ب] ∩ [ب ، ج] و [أ ، ب] ∪ [ب ، ج] .

د) م عدد طبيعي بحيث 450 ⩽ م < 2430

بين أن كل عدد حقيقي من الشكل م × 10^{-2} عنصر من المجال
[4,5 ؛ 24,3] .

---

4 ـ المجاميع والفرق

1.4 . معاكس مجموع عددين حقيقين :

س و ع عددان حقيقيان :

تقبل أن :

معاكس مجموع عددين حقيقيين هو مجموع معاكسيهما

لديك : − (س + ع) = (− س) + (− ع)

تعرف أن : − س + (− ع) = − س − ع

تستنتج أن : − (س + ع) = − س − ع

2.4 . فرق مجموعتين وفرق فرقين :

بين أنه :

من أجل كل أعداد حقيقية س ، ع ، ص .

(س + ص) − (ع + ص) = س − ع ؛

(س − ص) − (ع − ص) = س − ع

بين أنه :

من أجل كل أعداد حقيقية س ، ع ، ص .

س − (ع + ص) = (س − ع) − ص = س − ع − ص

س − (ع − ص) = (س − ع) + ص = س − ع + ص

3.4 . المجاميع الجبرية

• س ، ع ، ص ، ى ، هـ ، ن أعداد حقيقية .

تقول إن العدد الحقيقي س + ع − ص − ى + هـ − ن **مجموع جبري** .

تذكر أنه إذا أردت حساب مجموع جبري يمكنك :

ـ اما أن تجري العمليات بالترتيب المعطاة به .

ـ اما أن تحسب مجموع الأعداد الموجبة ومجموع الأعداد السالبة ثم مجموع العددين الحقيقيين الناتجين .

س ، ع ، ص ، ى ، و أعداد حقيقية .

بين أن : س + (ع − ص + ى − و) = س + ع − ص + ى − و

س − (ع − ص + ى − و) = س − ع + ص − ى + و

ومنه القاعدتين :

عندما تكون القوس مسبوقة بالإشارة + ، يمكنك أن تحذفها

عندما تكون القوس مسبوقة بالاشارة − يمكنك أن تحذفها بعد تغيير كل الإشارات الموجودة داخل هذه القوس .

ا) أحسب معاكس المجموع س + ع في كل حالة مما يلي :

س = $5,4\underline{6}\ldots$ و ع = $12,\underline{517}\ldots$

س = $-24,41\underline{25}\ldots$ و ع = $7,84\underline{1}\ldots$

ب) أحسب بطريقتين مختلفتين العدد الحقيقي س − (ع − ص) في كل من الحالات الآتية :

س = $19,4\underline{2}\ldots$ ، ع = $-8,7\underline{14}\ldots$ ، ص = $-11,1\underline{93}\ldots$

س = $5,417\underline{17}\ldots$ ، ع = $-2,1\underline{47}\ldots$ ، ص = $-4,6\underline{52}\ldots$

ج) أحسب بطريقتين مختلفتين كلا من المجاميع الجبرية الآتية :

* $1,8\underline{14}\ldots + 42,3\underline{63}\ldots - 35,782\ldots + 28,16\underline{6}\ldots$
$- 18,5\underline{64}\ldots$.

* $51,8\underline{42}\ldots - 27,675 + 86,4\underline{33}\ldots - 17,5\underline{84}\ldots$
$+ 146,1\underline{09}\ldots$.

د) أحسب بطريقتين مختلفتين العدد الحقيقي ا − (ب − ج) بحيث :

ا = $5,603\underline{03}\ldots$ ، ب = $3,4\underline{62}\ldots$ ، ج = $-9,8\underline{42}\ldots$

تمـاريـــن

1 . سـ ، صـ عددان حقيقيان بحيث سـ = ...7,8**43** ، صـ = ...10,15**14**

1) بطريقةمماثلة لتلك التي عمل بها في الفقرة 1.1 من الدرس ارفق بكل من العددين الحقيقيـن سـ و صـ المتتالية العشرية المناسبة له :

$س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ ، $س_4$ ، $س_5$ ، ... ؛ $ص_1$ ، $ص_2$ ، $ص_3$ ، $ص_4$ ، $ص_5$ ،

2) أوجد حصرا من الرتبة 3 لـ : $س_5 + ص_5$.

أوجد حصراً من الرتبة 4 لـ : $س_6 + ص_6$.

3) أوجد حصراً من الرتبة 5 لـ : $س_7 + ص_7$.

2 . نفس الأسئلة من أجل العددين الحقيقيـن سـ ، صـ

بحيث : سـ = − ...12,34**78** ؛ صـ = ...9,8**156**

3 . نفس الأسئلة من أجل العددين الحقيقيـن سـ ، صـ

بحيث : سـ = − ...6,5**21** ؛ صـ = − ...4,3215648

4 . سـ ، صـ عددان حقيقيان بحيث سـ = ...3,25**64** ، صـ = ...9,2**451**

1) أكتب كلا من العددين سـ ، صـ بثلاثين رقما بعد الفاصلة .

2) احسب قيمة تقريبية لـ : سـ + صـ وذلك اعتمادا على القيم التقريبية المحصل عليها في السؤال السابق .

3) هل يظهر دور في كتابة العدد سـ + صـ ؟

ما هو عدد أرقام هذا الدور ؟

تحقق من أن هذا العدد هو المضاعف المشترك الأصغر لعدد أرقام دور سـ وعدد أرقام دور صـ .

4) أعط النشر العشري غير المحدود للمجموع سـ + صـ .

5 . نفس الأسئلة من أجل سـ = ...8,52**36** ، صـ = − ...3,**427** .

6 . نفس الأسئلة من أجل العددين سـ ، صـ بحيث سـ = − ...13,**4157** ؛ صـ = ...7,**245061**

7 . 1) أعط دورا لمجموع العددين الحقيقيـن الممثلين بـ : ...2,**54** ، ...6,2**78**

2) نفس السؤال من أجل العددين الحقيقيـن الممثلين بـ : ...2,**543** ، ...6,2**78**

3) نفس السؤال من أجل العددين الحقيقيـن الممثلين بـ :

...2,**5436** ، ...6,2**78** .

8 . 1) أعط عددين حقيقين سـ ، صـ ممثلين بنشرين عشريين غير محدودين دوريين بحيث لدور العدد سـ 6 أرقام ولدور العدد صـ 8 أرقام .

2) ما هو عدد أرقام دور النشر العشري غير المحدود الذي يمثل العدد الحقيقي سـ + صـ ؟

3) أعط النشر العشري غير المحدود للعدد الحقيقي سـ + صـ .

9 . سـ ، صـ عددان حقيقيان ممثلان بنشرين عشريين غير محدودين دوريين لدور العدد سـ 12 رقما ، ولدور العدد صـ 15 رقما .

ما هو عدد أرقام دورة العدد سـ + صـ ؟

10 . س ، ص ، ع أعداد حقيقية بحيث :

س = $4{,}28\underline{28}\ldots$ ؛ ص = $6{,}\underline{345}\ldots$ ؛ ع = $8{,}\underline{427254}\ldots$

1) عين النشرين العشريين غير المحدودين الذين يمثلان العددين الحقيقين (س + ص) و (س + ص) + ع .

2) عين النشرين العشريين غير المحدودين الذين يمثلان العددين الحقيقين : (ص + ع) ؛ س + (ص + ع) .

11 . س ، ص ، ع أعداد حقيقية بحيث :

س = − ($5{,}\underline{634}\ldots$) ؛ ص = $7{,}1\underline{64}\ldots$ ؛ ع = − $4{,}\underline{653782}\ldots$.

تحقق من أن : (س + ص) + ع = س + (ص + ع) .

12 . ا ، ب ، جـ ، د أعداد حقيقية بحيث :

ا = − $548{,}34\underline{75}\ldots$ ؛ ب = $880{,}3\underline{12}\ldots$ ؛ جـ = $425{,}18$

د = − $305{,}9$.

1) احسب ا + ب ثم جـ + د ثم (ا + ب) + (جـ + د) .

2) احسب ا + جـ ثم ب + د ثم (ا + جـ) + (ب + د) .

3) احسب ا + د ثم ب + جـ ثم (ا + د) + (ب + جـ) .

13 . أعط معاكس كل عدد حقيقي من الأعداد الآتية :

− ($4{,}87\underline{5}\ldots$) ؛ $6{,}25\underline{4}\ldots$ ؛ $1{,}00\underline{9}\ldots$ ؛ − $7{,}1001\ldots$

14 . عين في كل حالة العدد الحقيقي س بحيث :

1) $4{,}832$ + س = − $8{,}5\underline{66}\ldots$

2) − ($24{,}6\underline{35}\ldots$) + س = − $9{,}4\underline{72}\ldots$

3) س − $234{,}8$ = $428{,}45$

15 . سـ ، صـ ، ع أعداد حقيقية بحيث : سـ = − $28{,}47\ldots$ ، سـ + صـ = 0 ، ع = $24{,}5\underline{31}\ldots$

احسب صـ ؛ سـ + ع ؛ صـ + ع

16 . عين في كل حالة ، العدد الحقيقي سـ بحيث :

1) سـ + ...6,3$\underline{82}$ = ...7,2$\underline{525}$

2) سـ − 8,34 = − ...10,$\underline{427}$

3) 48,468 − سـ = 65,749

17 . عين في كل حالة عددين حقيقين سـ و صـ بحيث :

1) | س | = 18,7 ؛ | صـ | = 12,3 ، سـ + صـ = − 6,4

2) | س | = 24,6 ، | صـ | = 7,8 ، سـ + صـ = 16,8

3) | س | = 4,8 ، | صـ | = 9,6 ، سـ = − 14,4

18 . تا تطبيق من ح في ح معرف بالشكل التالي :

تا (س) = | س − 4 |

احسب : تا (− 3) ، تا (− 1,5) ، تا (− 1) ، تا (0) ، تا (2,5) ،

تا (3) ، تا (4,5) ، تا (4,25) ، تا (2,53) .

19 . تاتطبيق من ح في ح معرف كما يلي :

تا (س) = | س − 2 | + (س − 3 |

احسب تا (− 2) ، تا (− 0,5) ، تا (0) ، تا (1) ، تا (2,3) ، تا (3,41)

تا (5,5)

20 . سـ ، صـ عددان حقيقيان بحيث : | س | = | ص | وَ سـ > صـ .

ما هي إشارة العدد الحقيقي سـ ؟ وما هي إشارة العدد الحقيقي صـ ؟

21 . سـ عدد حقيقي بحيث سـ > 3 و سـ < 7

1) ما هي إشارة س − 3 ؟ ما هي إشارة س − 7 ؟

2) أكمل ما يلي : | س − 3 | = ... ؛ | س − 7 | = ... ؛ | 3 − س | = ... ؛

| 7 − س | = ...

22 . سـ عدد حقيقي ، أ عدد حقيقي سالب أو يساوي الصفر بحيث : | س | = | أ |

بين أن سـ يساوي إما أ وإما − أ .

23 . سـ عدد حقيقي .

1) أكمل ما يلي : | س − 2 | = ... إذا كان س − 2 ⩾ ...

| س − 2 | = ... إذا كان س − 2 < ...

2) أكمل ما يلي : | س − 2 | = ... إذا كان س ⩾ ...

| س − 2 | = ... إذا كان س < ...

24 . س عدد حقيقي . أكمل ما يلي :

| س – 3 | + 11 = ...   إذا كان س ⩾ ...

| س – 3 | + 11 = ...   إذا كان س > ...

25 . س عدد حقيقي . أكمل ما يلي :

| س – 5 | + 12,7 = ...   إذا كان ... ⩾ ...

| س – 5 | + 12,7 = ...   إذا كان ... > ...

26 . س عدد حقيقي ، بسط بإزالة عمودي القيمة المطلقة وتبعا لقيم العدد الحقيقي س كلا من الكتابات التالية :

1) | س – 2,3 | + 7,4

2) | س – 3,7 | – 8,6

3) | 4,3 – س | + 3

4) | 5,15 – س | – 9,32

27 . س ، ص ، ع أعداد حقيقية بحيث :

ص = | س + 2,4 | + 7,3 و ع = | س – 4 | – 5

1) بين أن العدد الحقيقي ص موجب تماما .

2) أكتب العدد ع بدون عمودي القيمة المطلقة .

3) من أجل أية قيم للعدد س يكون العدد ع موجب ؟

28 . س ، ص عددان حقيقيان . قارن في كل حالة بين | س + ص | و | س | + | ص |

1) س = 7,12 ؛ ص = 8,06

2) س = – 6,182 ؛ ص = 12,246

3) س = 4,58 ؛ ص = – 1,024

4) س = – 3,407 ؛ ص = – 11,618

29 . عين في كل حالة ، عددين حقيقين س ، ص بحيث :

1) | س | = 8 و | ص | = 12 وَ 0 > س + ص > 10

2) | س | = 8 و | ص | = 12 وَ س + ص ≯ – 5

3) | س | = 35 وَ | ص | = 12,8 وَ س – ص < 10

4) | س | = 1,4 وَ | ص | = 6,7 وَ س – ص < 5,4

30 . سـ ، صـ ، ع أعداد حقيقية بحيث :

سـ = − ...8,56**284** ؛ صـ = − ...8,573**21** ؛ ع = − ...8,550**64**

1) احسب سـ − صـ ؛ سـ − ع ؛ صـ − ع

2) قارن بين سـ و صـ ثم بين سـ و ع ثم بين صـ و ع .

31 . رتب تصاعديا الأعداد الحقيقية التالية :

− 9,62 ؛ ...4,5**73** ؛ 12,7 ؛ 7,54 ؛ − ...8,466

32 . سـ ، صـ ، ع أعداد حقيقية بحيث :

سـ = − 24,72 ، صـ = 5,68 ، ع = − 6,41

1) احسب سـ′ ، صـ′ ، ع′ بحيث :

سـ′ = سـ − صـ ، صـ′ = سـ − ع ، ع′ = ع − صـ .

2) رتب تصاعديا الأعداد الحقيقية :

سـ ، صـ ، ع ، سـ′ ، صـ′ ، ع′ .

33 . سـ ، صـ ، ع أعداد حقيقية بحيث :

سـ = ...453,**27** ، صـ = − 268,452 ، ع = − 68,7

1) احسب الأعداد الحقيقية و ، سـ′ ، صـ′ ، ع′ بحيث :

و = س + ص + ع ؛ سـ′ = س + ص − ع ؛ صـ′ = س − ص + ع ،

ع′ = س − ص − ع .

2) رتب تصاعديا الأعداد : سـ ، صـ ، ع ، و ، سـ′ ، صـ′ ، ع′ .

34 . سـ ، صـ ، ع ، و أعداد حقيقية بحيث :

س ≥ 0 ؛ 3,8 < ص < 5,3 ؛ 11 < ع < 12,4 ؛ و < 14

1) أعط بيان العلاقة : « ... < ... » في المجموعة { س ، ص ، ع ، و }

أعط المخطط السهمي لهذه العلاقة .

35 . سـ ، صـ ، ع ، و أعداد حقيقية بحيث :

سـ < ع ، صـ < و ، سـ − صـ < سـ − ع .

1) أعط بيان العلاقة « ... < ... » في المجموعة { س ، ص ، ع ، و }

2) أعط المخطط السهمي لهذه العلاقة .

36 . بدراسة كل الحالات الخاصة باشارتي العددين سـ ، صـ بين أنه مهما كان العددان الحقيقيان سـ ، صـ فان :

1) | س + ص | ≥ | س | + | ص |

2) | س − ص | ≥ | س | + | ص |

37 . س ، ص عددان حقيقيان بحيث :

س = − (...326,456 208 8547)

ص = ...584,326 764 5278

1) أكتب حصرا من الرتبة 5 للعدد س ثم للعدد ص .

2) أكتب حصراً من الرتبة 5 للعدد س + ص ثم للعدد س − ص .

3) أكتب حصرا من الرتبة 8 للعدد س + ص ثم للعدد س − ص .

38 . س ، ص عددان حقيقيان بحيث :

س = ...54,624 912 6328

ص = − (...36,147 824 0117) .

1) أعط القيمة المقربة إلى $\frac{1}{10^8}$ بالنقصان للعدد س ثم للعدد ص .

2) أعط القيمة المقربة إلى $\frac{1}{10^8}$ بالنقصان للعدد س + ص ثم للعدد س − ص

39 . أكتب على شكل مجالات كلا من المجموعات التالية :

1) م$_1$ = { س | س ∈ ح و −3,8 ≤ س ≤ 5,12 } .

2) م$_2$ = { س | س ∈ ح و −12,3 ≤ س < 7,43 }

3) م$_3$ = { س | س ∈ ح و −5,08 < س < 3,15 }

4) م$_4$ = { س | س ∈ ح و −4,6 < س ≤ 8,32 } .

40 . أكتب على شكل مجالات أو تقاطع مجالات أو اتحاد مجالات كلا من المجموعات التالية :

1) م$_1$ = { س | س ∈ ح و −8,2 ≤ س ≤ 7,4 وَ 3,4 ≤ س < 12,35 } .

2) م$_2$ = { س | س ∈ ح و −8,2 ≤ س ≤ 7,4 أو 3,4 ≤ س < 12,35 } .

3) م$_3$ = { س | س ∈ ح و −6,8 ≤ س < 5,04 أو −5,7 ≤ س < 11,2 }

41 . أكتب على ابسط شكل ممكن كلا من المجموعات التالية :

1) م$_1$ = { س | س ∈ ح وَ −4,3 ≤ س ≤ 5 } .

2) م$_2$ = { س | س ∈ ح وَ −2,5 ≤ س ≤ 6,08 }

3) م$_3$ = { س | س ∈ ح وَ −0,8 ≤ س ≤ 6,12 } .

4) م$_1$ ∩ م$_2$ ؛ م$_1$ ∪ م$_2$

5) (م$_1$ ∩ م$_2$) ∩ م$_3$ ؛ (م$_1$ ∩ م$_2$) ∪ م$_3$.

42 . $م_1$ = { س | س ∋ ح وَ − 5,4 ⩾ س ⟨ 8,2 }

$م_2$ = { س | س ∋ ح وَ س > − 6,05 } .

$م_3$ = { س | س ∋ ح وَ س ⟨ − 6,05 } .

عين كلا من المجموعات التالية :

1) $م_1$ ∩ $م_2$ ؛ $م_1$ ∩ $م_3$ ؛ $م_2$ ∩ $م_3$.

2) $م_1$ ∪ $م_2$ ؛ $م_1$ ∪ $م_3$ ؛ ($م_2$ ∩ $م_3$) ∪ $م_1$.

43 . عين في كل حالة مجموعة الأعداد الحقيقية س بحيث :

1) س ⟨ 6,2 وَ س ⩽ − 4,7

2) س > − 7,8 وَ س ⩾ 8,12

3) س ⟨ 9,3 وَ س ⩽ − 6,42 وَ س > − 5,1 وَ س ⟨ 7,5

44 . س ، ص ، ع ثلاثة أعداد حقيقية بحيث :

س − ص ⩾ ع + 6 وَ ص + 2 ⩽ 8 − ع وَ 3 − ص ⩾ ع + س

بين أن : − 3 ⩾ س ⩾ 12

45 . س ، ص عددان حقيقيان . بسط ، بعد إزالة الأقواس كلا من المجاميع الجبرية التالية :

1) (س + ص − 42,25) + (ص − س + 34,18) − (س − ص + 8,51)

2) (س − ص − 7,12) + (س − ص + 21,64) − (س + ص + 15,04) .

3) (4,72 − س) − (12,48 − س + ص) − (ص − 4,3) + (س − 11,5)

46 . س ، ص عددان حقيقيان ؛ بسط بعد إزالة الأقواس كلا من المجاميع الجبرية التالية :

1) (7,8 + س) − (ص − 12,24 + س) + (21,5 − س) .

2) 4,5 − (س − 5,43) + (8,6 − ص) .

3) (س − ص + 9,2) − (س − ص + 11,8) − (س − ص − 7,42) .

47 . س ، ص ، ع ، ه أعداد حقيقية . أكمل كلا من المساويات التالية :

1) س − ص + 7,8 + ع − ه = س − ص + 2,4 − (...)

2) س − ص − ع + ه − 4,6 = س − ع − (...)

3) س − ص + ع − ه + 3,9 = س − ه − 12,4 − (...)

4) س + ص − 8,25 + ع + ه = ص + ع − (...)

48 . س ، ص ، ع ، ه أعداد حقيقية بحيث :

س = − (205,34) ، ص = ...3,42**51** ؛ ع = 74,65 ،

ه = − (...52,3**4**)

1) أحسب س − ع ثم ص − ه ثم (س − ع) + (ص − ه) .

2) أحسب س − ه ثم ص − ع ثم (س − ه) + (ص − ع) .

3) أحسب (س − ع) − (ص − ه) ثم (س − ص) − (ع − ه)

49 . س ، ص عددان حقيقيان . بسط بعد إزالة الأقواس كلا من المجاميع الجبرية التالية :

1) (س + ص − 11,2) − [(س − ص − 4,5) − (س + 3,6)] − (س + ص + س + 9,2

2) 6,3 − [(س − ص + 2,7) − (4 + ص − س)] + (س + ص) − (6,2 + س + ص

3) 2,42 + [5,28 + (س − 7,4)] − [(س − ص − 18,7) − (15,4 − ص)] .

50 . نعرف في ح عملية داخلية رمزها ⊥ بما يلي : س ⊥ ص = س + ص − 1 .

1) أحسب − 1,5 ⊥ 2,3 ؛ 7,32 ⊥ (− 4,56) ، ...43,5**23** ⊥ ...5,3467

2) بين أن العملية الداخلية ⊥ عملية تبديلية وتجميعية .

3) بين أن 1 عنصر حيادي بالنسبة للعملية ⊥ .

4) بين أن كل عدد حقيقي يقبل نظير بالنسبة للعملية ⊥ .

4

الضرب في ح
قـوة عـدد حقيـقي

1 ـ الضرب في ح

1.1 . جداءعددين حقيقيــين :

س و ع عددان حقيقيان بحيث :

$س = 5,243\underline{3}...$ ؛ $ع = 2,8565\underline{6}...$

باستعمال طريقة مماثلة للطريقة المستعملة في البحث عن مجموع عددين حقيقيين تحصل على التوالي :

- $5 \leqslant س_1 < 6$ و $2 \leqslant ع_1 < 3$

  ومنه $10 \leqslant س_1 ع_1 < 18$
- $5,2 \leqslant س_2 < 5,3$ و $2,8 \leqslant ع_2 < 2,9$

  ومنه $14,56 \leqslant س_2 ع_2 < 15,37$
- $5,24 \leqslant س_3 < 5,25$ و $\leqslant 2,85 \leqslant ع_3 < 2,86$

  ومنه $14,9340 \leqslant س_3 ع_3 < 15,0150$

  تستنتج أن : $14 \leqslant س_3 ع_3 < 15$.

  تحصل هكذا على حصر من الرتبة 0 لـ : $س_3 ع_3$
- $5,243 \leqslant س_4 < 5,244$ و $2,856 \leqslant ع_4 < 2,857$

  ومنه $14,974008 \leqslant س_4 ع_4 < 14,982108$

  تستنتج أن : $14,9 \leqslant س_4 ع_4 < 15,0$

  تكون هكذا قد حصلت على حصر من الرتبة 1 لـ : $س_4 ع_4$
- $5,2433 \leqslant س_5 < 5,2434$ و $2,8565 \leqslant ع_5 < 2,8566$.

  ومنه :

  $14,97748645 \leqslant س_5 ع_5 < 14,97849644$

  تستنتج أن : $14,97 \leqslant س_5 ع_5 < 14,98$

  تكونهكذا قد حصلت على حصر من الرتبة 2 لـ : $س_5 ع_5$

تحصل بمتابعة العمل على حصور من رتب أكبر فأكبر .
تحصل هكذا على النشر العشري غير المحدود الذي بدايته 14,97 . هذا النشر العشري غير المحدود يمثل عددا حقيقيا ص .
تقول إن العدد الحقيقي ص هو **جداء** العددين الحقيقيين س و ع
س و ع هما **عاملا** الجداء ص
تكتب : ص = س × ع أو ص = س ع

أ) بمتابعة البحث السابق أوجد حصرا من الرتبة 3 ل : $س_6 ع_6$ ، ثم حصرا من الرتبة 4 ل : $س_7 ع_7$.
ب) قم بنفس البحث المقام به في الفقرة 1.1 مع العددين الحقيقيين س ، ع بحيث س = ...6,377 ، ع = ...2,52626 -

---

2.1 . الضـــرب في ح :
تقبل أنه يمكنك أن ترفق بكل ثنائية مرتبة (س ، ع) من ح × ح العدد الحقيقي ص الذي هو جداء العددين الحقيقيين س و ع .
تعرف هكذا تطبيقا من ح × ح في ح هو : **الضرب في ح**
تعريف :

إن التطبيق من ح × ح في ح الذي يرفق بكل ثنائية مرتبة (س ، ع) من ح × ح العدد الحقيقي س ع هو **الضرب في ح** .

تلاحظ أن الضرب في ح هو عملية داخلية في ح
3.1 . الـزمـــرة (ح* ، ×)
تقبل أن : ـ الضرب في ح تبديلي .
ـ الضرب في ح تجميعي .
ـ العدد الحقيقي 1 هو العنصر الحيادي للضرب في ح .
ـ كل عدد حقيقي س غير معدوم يقبل نظيرا بالنسبة للضرب في ح
ويسمى هذا النظير **مقلوب س** ويرمز له بالرمز $\frac{1}{س}$ كما يرمز له أيضا بالرمز $س^{-1}$.

تلاحظ ان مقلوب $س^{-1}$ هو س ، تقول إن س و $س^{-1}$ هما **مقلوبا بعضهما** بالنسبة للضرب في ح .

تستنتج من الخواص السابقة أن : ح* ، المزودة بالضرب ، زمرة تبديلية .

أ) أوجد في كل حالة مقلوب سـ بحيث سـ = 5,2 ، سـ = − 12,34 سـ = − 6,572 .

ب) هل المجموعة ح ، المزودة بالضرب زمرة ؟

4.1 . الطبيعةوالقيمة المطلقة لجداء عددين حقيقيين :

تقبل أن :

جداء عددين حقيقيين من نفس الطبيعة موجب
جداء عددين حقيقيين من طبيعتين مختلفتين سالب .

تقبل أيضا أن :

القيمة المطلقة لجداء عددين حقيقين تساوي جداء القيمتين المطلقتين لهذين العددين الحقيقيين .

أوجد طبيعة كل جداء من الجداءات الآتية ثم أحسب بطريقتين مختلفتين كلا من هذه الجداءات .

أ) $(-12,34) \times 7,136$ ؛ $(-8,452) \times (-25,71)$ ؛ $11,576 \times (-2,33)$.

ب) $(-14,543) \times (-8,346) \times (-21,715)$ ؛ $12,45 \times (-7,91) \times 8,766$.

5.1. توزيعية الضرب في ح بالنسبة للجمع في ح .

س ، ع ، ص أعداد حقيقية .

تقبل أنه :

من أجل كل أعداد حقيقية س ، ع ، ص س (ع + ص) = س ع + س ص .

تستنتج أن : (ع + ص) س = ع س + ص س .

نقول ان الضرب في ح **توزيعي** بالنسبة للجمع في ح .

أ) بين أن الضرب في ح توزيعي بالنسبة للطرح في ح .

ب) أ ، ب ، جـ ، أعداد حقيقية ، بين أن :

أ (ب + جـ + د) = أ ب + أ جـ + أ د ،

أ (ب + جـ − د) = أ ب + أ جـ − أ د .

6.1 . جداء معاكس عددين حقيقيين :

س و ع عددان حقيقيان .

- بين أن : (− س) ع = س (− ع) = − س ع
- بين أن : (− س) (− ع) = س ع.

أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي س : س (− 1) = − س

ب) أحسب بثلاثة طرق مختلفة : معاكس س ع في كل من الحالتين الآتيتين :

س = − 7,143 و ع = 12,725 ؛ س = 8,24 و ع = − 17,133 .

7.1 . الجداء المعدوم .

- س عدد حقيقي

تعرف أنه من أجل كل عدد حقيقي ع : ع + 0 = ع

تستنتج أن : س (ع + 0) = س ع

لكن : س (ع + 0) = س ع + س × 0

ومنه س ع + س × 0 = س ع

ومنه س × 0 = س ع − س ع

لكن س ع − س ع = 0 ومنه س × 0 = 0

لقدبرهنت هكذا أنه :

من أجل كل عدد حقيقي س ، س × 0 = 0 .

- س و ع عددان حقيقيان بحيث س ع = 0

لا يمكن لكل من العددين الحقيقيين س و ع أن يكون مختلفا عن الصفر ، والا فسيكون جداءهما مختلفا عن الصفر كذلك .

لديك إذا حالتان :

الحالة الأولى : كل من العددين الحقيقيين س ، ع معدوم .

الحالة الثانية : أحد العددين الحقيقيين ، س مثلا ، ليس معدوما

يقبل س إذا مقلوبا $س^{-1}$.

لديك إذا : $س^{-1}$ (س ع) = $س^{1}$ × 0

لكن : $س^{-1}$ (س ع) = ($س^{-1}$ س) ع و $س^{-1}$ × 0 = 0

ومنه ($س^{-1}$ س) ع = 0

لكن $س^{-1}$ س = 1 ومنه 1 × ع = 0

لكن 1 × ع = ع ومنه ع = 0

بين أنه إذا كان ع غير معدوم فإن س يكون معدوما .

تكون هكذا قد برهنت أنه إذا كان : س ع = 0 فإن س = 0 أو ع = 0

يمكنك أن تستخلص أنه :

إذا كان جداء عددين حقيقيين معدوما فإن أحد العددين على الأقل معدوم .

لقد برهنت النظرية الآتية .

نظريـة :

يكون جداء عددين حقيقيين معدوما إذا وفقط إذا كان أحد هذين العددين الحقيقيين على الأقل معدوما .

8.1 . المساواة والضرب في ح .

س ، ع ، ص أعداد حقيقية.

بين أنه

إذا كان س = ع فإن س ص = ع ص

•

بين أنه

إذا كان س ص = ع ص وكان ص $\neq 0$ فإن س = ص

أ) س ، ع ، ص أعداد حقيقية.

بين أن : س ع ص = 0 إذا وفقط إذا كان : س = 0 أو ع = 0 أو ص = 0

ب) س ، ع ، ص ، هـ أعداد حقيقية حيث :

س = ع و ص = هـ بين أن س ص = ع هـ

9.1 . علاقة الترتيب والضرب في ح .

س ، ع ، ص أعداد حقيقية .

• بين أنه :

إذا كان ص $\geqslant 0$ وكان س $\leqslant$ ع فإن س ص $\leqslant$ ع ص إذا كان ص $\leqslant 0$ وكان س $\leqslant$ ع فإن س ص $\geqslant$ ع ص

• بين أنه :

إذا كان س ص $\leqslant$ ع ص وكان ص > 0 فإن س $\leqslant$ ع إذا كان س ص $\leqslant$ ع ص وكان ص < 0 فإن س $\geqslant$ ع

أ) س ، ع ، ص ، هـ أعداد حقيقية بحيث $0 \leqslant$ س $\leqslant$ ص و $0 \leqslant$ ع $\leqslant$ هـ

بين أنه : س ع $\leqslant$ ص هـ .

ب) س ، ع ، ص ، هـ أعداد حقيقية بحيث $0 \leqslant$ س $\leqslant$ ص و ع $\leqslant$ هـ $\leqslant 0$.

هل يكون لديك : س ع $\leqslant$ ص هـ ؟

جـ) أوجد أربعة أعداد حقيقية س ، ع ، ص ، هـ بحيث :

س ع $\leqslant$ ص هـ و س $\leqslant$ ص و ع $\leqslant$ هـ

---

2 ـ قوة عدد حقيقي ـ تحليل

1.2 . القوة ذات الأس الطبيعي .

س عدد حقيقي .

• إن العدد الحقيقي س س هو **مربع** العدد س ؛ تكتب : س س = $س^2$.

إن العدد س س س هو **مكعب** العدد س ، تكتب : س س س = $س^3$

تعريف :

س عدد حقيقي ؛ **ن** عدد طبيعي . **القوة النونية** للعدد الحقيقي س هي جداء **ن** عاملا يساوي كل منها العدد الحقيقي س .

تكتب : $\underbrace{س\ س\ س\ ...\ س}_{ن\ عاملا} = س^ن$

العدد الحقيقي $س^ن$ يقرأ : « س قوة **ن** »

العدد الطبيعي **ن** هو **الأس** لـ : $س^ن$

• نتفق على أن : $س^1 = س$ ؛ $س^0 = 1$

أ) احسب $(11,24)^3$ ، $(-7,1)^3$ ، $(2,4)^4$ ، $(-5,2)^5$.

ب) س عدد حقيقي ، **ن** عدد طبيعي بين أنه إذا كان س موجبا فإن $س^ن$ موجب .

بين أنه : اذا كان س سالبا وكان ن زوجيا فان $س^ن$ موجب .

بين أنه إذا كان س سالبا وكان **ن** فرديا فان $س^ن$ سالب .

جـ) س ، ع عددان حقيقيان ، م ، ن عددان طبيعيان .

بين أن : $س^م \times س^ن = س^{م+ن}$ = $(س^م)^ن = س^{من}$.

$(س\ ع)^م = س^م ع^م$ ، $|س^م| = |س|^م$.

د) بين أن مربع أي عدد حقيقي هو عدد موجب أو معدوم .

2.2 . القوة ذات الأس السالب .

س عدد حقيقي غير معدوم ، م عدد صحيح طبيعي غير معدوم .

تعرف أن $\frac{1}{س^م}$ هو مقلوب العدد الحقيقي $س^م$.

نتفق على الكتابة : $\frac{1}{س^م} = س^{-م}$

يمكنك أن تكتب بصورة خاصة : $\frac{1}{س} = \frac{1}{س^1} = س^{-1}$

3.2 . الخــواص :

س وع عددان حقيقيان غير معدومين ، م ، ن عددان صحيحان نسبيان .

تقبل أن :

$$س^م \times س^ن = س^{م+ن}$$
$$(س^م)^ن = س^{م ن}$$
$$(س ع)^م = س^م \times ع^م$$

أ) إحسب : $(0,2)^{-3}$ ، $(1,3)^{-4}$ ، $(-6,1)^{-3}$

ب) إحسب بطريقتين مختلفتين كلا من الأعداد الحقيقية الآتية :

$(2,5)^4 \times (2,5)^{-7}$ ، $[(-3,6)^2]^{-3}$ ، $(-1,4)^2 \times (2,7)^{-2}$

4.2 . جداء مجاميع وفروق .

س ، ع ، ص ، ى ، هـ أعداد حقيقية .

بين أن : (س + ع) (ص + ى) = س ص + س ى + ع ص + ع ى

(س + ع) (ص − ى) = س ص − س ى + ع ص − ع ى

(س − ع) (ص − ى) = س ص − س ى − ع ص + ع ى

(س − ع + ص) (ى − هـ) = س ى − س هـ − ع ى + ع هـ
+ ص ى − ص هـ

5.2 . الجداءات الشهيرة :

س ، ع عددان حقيقيان :

بين أن

$$(س + ع)^2 = س^2 + 2 س ع + ع^2$$
$$(س - ع)^2 = س^2 - 2 س ع + ع^2$$
$$(س + ع) (س - ع) = س^2 - ع^2$$

أ) س و ع عددان حقيقيان.

إحسب $(س + 2,1)^2$ ، $[(1,3) س + (7,4) ع]^2$ ،

$[(2,3) س^2 - ع]^2$ ؛ $[س - (4,3) ع^2] [س + (4,3) ع^2]$

ب) أ و ب عددان حقيقيان :

بين أن : $(أ + ب)^3 = أ^3 + 3 أ^2 ب + 3 أ ب^2 + ب^3$

$(أ - ب)^3 = أ^3 - 3 أ^2 ب + 3 أ ب^2 - ب^3$

6.2 . تحليل مجموع جبري .

س ، ع ، ص ، ى ، هـ أعداد حقيقية

س ع - س ص + س ى - س هـ مجموع جبري

يمكنك أن تكتب :

س ع - س ص + س ى - س هـ = س (ع - ص + ى - هـ)

تقول انك **أخرجت** س **كعامل** أو أنك **حللت** المجموع الجبري

س ع - س ص + س ى - س هـ .

أ) س و ع عددان حقيقيان ، حلل كلا من المجاميع الجبرية الآتية :

$(1,2)$ س + $(4,8)$ ع ؛ $- \frac{3}{2}$ س + $(10,5)$ س ع - 27 $س^2$ ،

$(0,8)$ $س^2$ + $(0,24)$ س ع ؛ $س^3$ ع + 2 $س^2$ $ع^2$ + $س^2$ ع

ب) س ، ع ، أ ، ب ، جـ أعداد حقيقية

حلل كلا من المجاميع الجبرية الآتية :

$(0,15)$ س - $(0,3)$ س ع ؛ 0,25 أ - 0,5 ب + 0,15 جـ ؛

$س^2$ ع - س $ع^2$ + 2 س ع

تمـاريــن

1 . س و ع عددان حقيقيان بحيث :

س = ...8,54**12** ، ع = ...6,2**73**

1) بطريقة مماثلة لتلك التي عمل بها في الفقرة 1.1 من الدرس

ارفق بكل من العدد الحقيقي س و ع المتتالية العشرية المناسبة له :

$س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ ، $س_4$ ، $س_5$ ... ؛ $ع_1$ ، $ع_2$ ، $ع_3$ ، $ع_4$ ، $ع_5$ ...

2) أوجد حصرا من الرتبة 1 ل: $س_4$ ، $ع_4$

3) اوجد حصرا من الرتبة 2 ل: $س_5$ ، $ع_5$

4) اوجد حصرا من الرتبة 3 ل: $س_6$ ، $ع_6$

5) اوجد حصرا من الرتبة 4 ل: $س_9$ ، $ع_9$

2 . نفس الأسئلة من أجل العددين الحقيقيين س و ع بحيث :

س = − ...7,4**36** ، ع = ...12,8**05**

3 . نفس الأسئلة من أجل العددين الحقيقيين س و ع بحيث :

س = − ...24,**581** ، ع = − ...10,0**09** .

4 . ا ، ب ، جـ أعداد حقيقية بحيث:

ا = − ...12,8**42** ، ب = ...6,**538** ، جـ = − ...9,04**3**

1) إحسب الأعداد الحقيقية س و ع بحيث :

س = ا + ب − جـ ، ع = ا − ب − جـ

2) إحسب العدد الحقيقي س ع .

5 . ا ، ب ، جـ ، د أربعة أعداد حقيقية بحيث:

ا = − ...2,8**72** ؛ ب = ...15,62**4**

جـ = − 3,8 ؛ د = ...0,16**82** .

1) احسب الجداءات الآتية : ا ب ، ا د ، ب جـ ، جـ د .

2) احسب ا + جـ − و ب + د

3) احسب (ا + جـ) (ب + د) .

6 . ه = { − (4,1**82**...) ؛ 13,7**3**... ؛ 9,0**84**... ؛ − (0,10**60**...) }

تا و ها تطبيقان من ه في ح بحيث :

تا (س) = س − 8,1**35**... ، ها (س) = (− 5,4**16**...) × س

لا و د تطبيقان من ه في ح بحيث :

لا (س) = تا (س) + ها (س) ، د (س) = تا (س) × ها (س)

1) أوجد مجموعة صور عناصر المجموعة ه بالتطبيق تا .

2) أوجد مجموعة صور عناصر المجموعة ه بالتطبيق ها .

3) أوجد مجموعة صور عناصر المجموعة ه بالتطبيق لا .

4) أوجد مجموعة صور عناصر المجموعة ه بالتطبيق د .

7 . أ ، ب ، ج ، د أربعة أعداد حقيقية بحيث :

أ = 10,4**15**... ، ب = − (0,5**8**...) ، ج = − 7,0**84**...

د = 4,**367**... .

أحسب كلا من الأعداد الحقيقية :

أ ب + ج د ، (أ ب + ج) د ، أ (ب + ج د) ، أ (ب + ج) د

8 . أ و ب عددان حقيقيان بحيث :

أ > ب و أ ب ∈ ح*− و أ + ب ∈ ح*+

1) ماهي إشارة أ ؟ ما هي إشارة ب ؟

2) قارن بين | أ | و | ب | .

9 . أ ، ب ، ج ، د أعداد حقيقية بحيث :

أ > ب و أ ب ∈ ح*+ و أ + ب ∈ ح*+

ج > د و ج د ∈ ح*+ و ج + د ∈ ح*−

1) ماهي اشارة أ ؟ ما هي اشارة ب ؟

2) ما هي إشارة ج ؟ ما هي إشارة ؟

3) قارن بين | أ | و | ب | ؛ قارن بين | ج | و | د |

10 . عين في كل حالة الثنائيات المرتبة (س ، ع) من ح × ح بحيث :

1) س ع = 0 و س + ع = − (8,0**46**...) .

2) س ع = 0 و س − ع = 12,4**507**... .

11 . عين الثنائيات المرتبة (س ، ع) من ح × ح بحيث :

(س − 18,4**26**...) (ع + 10,04**8**...) = 0

و (س + 0,0**570**...) (ع − 6,**54**...) = 0

12 . عين الثنائيات المرتبة (س ، ع) من ح × ح بحيث :

(س + ...16,5196) (س − ...28,4081) = 0

و (ع − ...0,092) (ع − 13,503) = 0 .

13 . عين الثنائيات المرتبة (س ، ع) من ص × ص بحيث :

4 < ع ⩽ 8 ، و (س − 3) (ع − 7) = 0

و (س − 3) (س − ع + 5) = 0

14 . ا ، ب ، س أعداد حقيقية بحيث :

ا = س − 4,25 و ب = 7,3 − س ، و ا ب ∈ ح +

1) أحسب المجموع ا + ب ثم أوجد إشارة ا و اشارة ب .

2) عين المجموعة ح بحيث يكون :

ح = { س | س ∈ ص و (س − 4,25) (7,3 − س) > 0 }

15 . س هو عدد حقيقي بحيث : − ...5,82 ⩽ س ⩽ ...12,6427

1) أكمل الحصر ... ⩽ − 5 س ⩽ ...

2) أكمل الحصر ... ⩽ ...6,305 × س ⩽ ...

16 . س عدد حقيقي بحيث :

− (...3,84) < س < ...6,915

1) ما هي إشارة العدد الحقيقي ا بحيث : ا = س − ...8,017 ؟

ما هي إشارة العدد الحقيقي ب بحيث : ب = س + ...4,202 ؟

2) قارن بين ا س و [− ...3,84] × ا

قارن بين ب س و ...6,915 × ب

17 . س عدد حقيقي بحيث س < − (...4,867) .

1) قارن بين 6 س و 6 × [− (...4,867)]

قارن بين − 4 س و (− 4) (− ...4,867)

2) قارن بين 6 س و − 28 .

قارن بين − 4 س و 18 .

18 . س و ع عددان حقيقيان بحيث :

4 س + 5 ع > − 2 و 2 س + 3 ع < 3

1) بين أن: − 4 س − 6 ع > − 6

بين أن ع < 8

2) بين أن: − 12 س − 15 ع < 6 و 10 س + 15 ع 15

بين أن س > − $\frac{21}{2}$

19 . احسب :

1) 2^{-4} ، 2^{-1} ، 2^{0} ، 2^{1} ، 2^{3} .

2) $(-3)^{-4}$ ، $(-3)^{-1}$ ، $(-3)^{0}$ ، $(-3)^{1}$ ، $(-3)^{3}$

3) $(0,1)^{-4}$ ، $(0,1)^{-1}$ ، $(0,1)^{0}$ ، $(0,1)^{1}$ ، $(0,1)^{3}$.

20 . احسب :

1) $(-4,\underline{12}\ldots)^{3}$ ، $(5,4\underline{32}\ldots)^{4}$ ، 6^{-3} .

2) $(-1)^{5}$ ، 1^{-13} ، $(-1)^{-18}$ ، 1^{-124}

3) $(0,4)^{-3}$ ، $(-0,8)^{-2}$ ، $(-3,67\ldots)^{3}$

21 . احسب :

1) $(2,5)^{-3}$ ، $(-2,5)^{3}$ ، $(-2,5)^{-3}$.

2) $\left(\frac{5}{2}\right)^{4}$ ، $\left(\frac{2}{5}\right)^{-4}$ ، $\left(-\frac{5}{2}\right)^{4}$ ، $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-4}$

22 . 1) قارن بين 9^{4} و 3^{8} .

2) قارن بين 4^{6} و 2^{12}

23 . أ عدد حقيقي

احسب كلا من القوى الآتية :

1) $\text{أ}^{4} \times \text{أ}^{2} \times \text{أ}^{5} \times \text{أ}^{3}$ ؛ $\text{أ}^{2} \times \text{أ}^{-2} \times \text{أ}^{4}$ ، $\text{أ}^{2} \times \text{أ} \times \text{أ}^{5} \times \text{أ}^{5} \times \text{أ}^{-7}$.

2) $\text{أ}^{-5} \times \text{أ}^{3} \times \text{أ}^{6}$ ؛ $\text{أ}^{3} \times \text{أ}^{5} \times \text{أ}^{-10} \times \text{أ}^{2}$.

24 . أ عدد حقيقي .

احسب كلا من الجداءات الآتية :

1) $\text{أ}^{-5} \times \text{أ}^{2} \times \text{أ}^{6} \times \text{أ}^{-3}$ ؛ $\text{أ}^{2} \times \text{أ}^{-1} \times \text{أ}^{5} \times \text{أ}^{-7}$

2) $\text{أ}^{4} \times \text{أ}^{-5} \times \text{أ}^{-11} \times \text{أ}^{12}$ ؛ $\text{أ}^{-4} \times \text{أ}^{-2} \times \text{أ}^{-2} \times \text{أ}^{-1} \times \text{أ}$.

25 . احسب بطريقتين مختلفتين كلا من الأعداد الحقيقية الآتية :

1) $[(4,\underline{12}\ldots)^{2}]^{3}$ ، $[(-3,2\underline{8}\ldots)^{3}]^{2}$ ، $[(0,2)^{-3}]^{2}$

. $[(-0,5)^{2}]^{4}$

2) $[(-5,3\underline{4}\ldots)(3,\underline{47}\ldots)(-6,05\ldots)]^{2}$

$[(0,4)(-0,3)(-0,5)]^{3}$

26 . أ ، ب ، جـ ، س ، ع ، ص أعداد حقيقية بحيث :

$\text{س} = 4,2\,\text{أ}^{3}\,\text{ب}^{-2}$ ؛ $\text{ع} = -0,5\,\text{أ}^{3}\,\text{ب}^{4}\,\text{جـ}^{-1}$ ؛ $\text{ص} = \text{أ}^{-2}\,\text{ب}^{3}\,\text{جـ}^{-2}$

احسب س ، ع ، ص في كل من الحالات الآتية :

1) أ = 2 ، ب = 0,5 ، جـ = 4 .
2) أ = 5 ، ب = − 2 ، جـ = 0,1 .
3) أ = − 0,2 ، ب = 5 ، جـ = − 2 .

27 . تعرف أن : $0 < 2 < 5$.

1) بضرب الأعداد الصحيحة 0، 2، 5 في العدد $\frac{1}{5 \times 2}$ ، رتب تصاعديا الأعداد الحقيقية 0، 2^{-1} ، 5^{-1} .

2) أ و ب عددان حقيقيان بحيث : 0 < أ < ب .

بضرب الأعداد الحقيقية 0 ، أ ، ب في العدد $\frac{1}{\text{أ ب}}$ ، رتب تصاعديا الأعداد الحقيقية 0 ، أ^{-1} ، ب^{-1} .

28 . س عدد حقيقي غير معدوم ، م عدد طبيعي
عين العدد الطبيعي م في كل من الحالات الآتية :
1) $\text{س}^{\text{م}} \times \text{س}^{2} = \text{س}^{5}$ ؛ $\text{س}^{-8} \times \text{س}^{\text{م}} = 1$.
2) $\text{س}^{4} \times \text{س}^{-5\text{م}} = \text{س}^{3}$ ؛ $\text{س}^{\text{م}-2} \times \text{س}^{5} = 1$

29 . أ و ب عددان حقيقيان ، احسب كلا من الأعداد الحقيقية الآتية :
1) (2أ − 5) (3ب + 4) − (2أ − 3) (2ب + 5) .
2) (أ + 4) (3ب − 4) − 3 (أ − 1) (ب + 4) .
3) 5 (أ − 2) (3ب − 5) − 2 (أ + 3) (2ب − 1

30 . أ، ب ، جـ أعداد حقيقية :
احسب الأعداد الحقيقية الآتية :
1) 2 (أ − ب) − 5 (أ + ب − 2) .
2) أ (أ + ب) − ب (جـ + أ) − جـ (أ + ب) .
3) 4 (أ − ب + جـ) − 5 (أ + ب + جـ) − (أ + ب − جـ)

31 . أ و ب عددان حقيقيان
احسب كلا من الأعداد الحقيقية الآتية :
1) (3,2**4**... × أ + 5,2 $)^2$ ؛ (أ − ...4,**102** $)^2$
2) (4,61 أ + ...7,2**4**) (4,61 أ − ...7,2**4**) ؛ (2,25 أ − **3,5** $)^2$
3) (أ − 3,2 ب) (أ + 3,2 ب) ؛ (أ + ...6,**04** $)^2$

32 . 5 هو رقم آحاد عدد طبيعي ن . ع هو رقم عشراته
1) بين أنه يمكنك كتابة ن على الشكل 10ع + 5
2) عين ع في كل من الحالات الآتية :
ن = 35 ، ن = 45 ، ن = 55 ، ن = 115
3) أحسب $(10ع + 5)^2$ ثم بين أن عدد مئات $ن^2$ هو ع (ع + 1) .
ما هو رقم آحاد ورقم عشرات $ن^2$
4) استعمل النتائج السابقة لكي تحسب ذهنيا مربعات كل من الأعداد الطبيعية
35 ، 45 ، 55 ، 115

33 . احسب ذهنيا باستعمال الجداءات الشهيرة :
1) 32^2 ، 81^2 ، 37×43 ، 79^2 ، 49^2
2) 38×42 ، 72×68 ، 21^2 ، 31^2 ، 19^2 ، $(-99)^2$

34 . أ و س عددان حقيقيان
حلل كلا من المجاميع الجبرية الآتية :
1) − 1,5 س + 2,5 ع − 0,5 ؛ 0,21 أ س + 2,8 $س^2$ − 0,35 س
2) أ س − أ $س^2$ + 3,5 $أ^2$ $س^2$ ، 1,4 $س^2$ + 0,28 أ $س^2$ − 42

35 . عين في كل حالة ، مجموعة الأعداد الحقيقية س بحيث :
1) س (س − 2) = 3 (س − 2)
2) (س + 3) (س + 1) = 3 (س + 1)

36 . عين في كل حالة ، الثنائيات المرتبة (س ، ع) من ح × ح بحيث :
1) س (ع − 2) = 5 (ع − 2) و س (ع + 1) = 8 (ع + 1)
2) س (ع − 3) = 5 (ع − 3) و ع (س + 1) = − 4 (س + 1)

37 . نعرف في ح عملية داخلية رمزها ⊥ كما يلي :
س ⊥ ع = | س | × ع
1) احسب 4 ⊥ 3 ، − 2 ⊥ 7 ، 11 ⊥ (− 6) ، (− 5) ⊥ (− 7)
2) احسب (− 6) ⊥ 4 ، 4 ⊥ (− 6)
هل العملية ⊥ تبديلية ؟

3) احسب [(− 3) ⊥ (− 8)] ⊥ 7 و (− 3) ⊥ [(− 8) ⊥ 7]
هل العملية ⊥ تجميعية ؟
4) عين مجموعة الأعداد الحقيقية ا بحيث يكون : ا ⊥ س = س
5) عين مجموعة الأعداد الحقيقية ب بحيث يكون : س ⊥ ب = س
6) قارن بين س ⊥ (ع + ص) و (س ⊥ ع) + (س ⊥ ص)
7) ج عدد حقيقي سالب تماماً

احسب : ج ⊥ $\frac{1}{ج}$ و $\frac{1}{ج}$ ⊥ ج

38 . نعرف في ح*− عملية داخلية رمزها ⊥ كما يلي : س ⊥ ع = | س | ع
1) بين أن العملية ⊥ تبديلية وتجميعية .
2) بين أن العملية ⊥ تقبل − 1 كعنصر حيادي .
3) بين أن كل عنصر من ح*− يقبل نظيرا بالنسبة للعملية ⊥

5	القسمة في ح نسب الأعداد الحقيقية

1 .. القسمة في ح

1.1 حاصل قسمة عدد حقيقي على عدد حقيقي آخر غير معدوم :

مسألة :

أ عدد حقيقي غير معدوم ، ب عدد حقيقي كيفي .
هل يوجد عدد حقيقي س بحيث : أ س = ب ؟
هل للعدد الحقيقي أ مقلوب ؟ نعم لانه غير معدوم .
نرمز لمقلوب أ بالرمز أ َ .
لديك : أ َ (أ س) = أ َ ب
ومنه : (أ َ أ) س = أ َ ب ومنه 1 × س = أ َ ب
ومنه : س = أ َ ب
لديك فعلا : أ (أ َ ب) = (أ أ َ) ب = 1 × ب = ب
نستنتج أن العدد الحقيقي أ َ ب هو حل للمسألة المطروحة .
هل هو الحل الوحيد ؟
إن أ َ ب هو صورة الثنائية المرتبة (أ َ ، ب) من ح × ح بواسطة الضرب في ح.
وتعلم أن هذه الصورة وحيدة .
إنك برهنت على النظرية الآتية :

نظريـــة :

> إذا كان أ ، ب عددين حقيقين وكان أ غير معدوم ، فإنه يوجد عدد حقيقي واحد س وواحد فقط بحيث : أ س = ب

تعريف :

أ ، ب عددان حقيقيان و أ غير معدوم إن **حاصل قسمة** ب على أ هو العدد الحقيقي س بحيث : أ س = ب

نرمز لهذا العدد بالرمز $\frac{ب}{أ}$.

وتكتب : س = $\frac{ب}{أ}$ وتقرأ : س يساوي ب على أ .

أ ، ب هما **حدا** حاصل القسمة $\frac{ب}{أ}$

تستطيع أن تقول إن العدد الحقيقي $\frac{ب}{أ}$ هو **نسبة** العدد الحقيقي ب إلى العدد الحقيقي أ .

ب هو **بَسْطُ** هذه النسبة ، أ هو **مقام** هذه النسبة

تذكر أن :

س = $\frac{ب}{أ}$ تعني أ س = ب

قد برهنت أن : $\frac{ب}{أ}$ = أَ ب

وتعلم أن : أَ = $\frac{1}{أ}$ = $أ^{-1}$

إذن تستطيع أن تكتب : $\frac{ب}{أ}$ = $أ^{-1}$ ب

- إذا كان ب = 1 فإن : س = $\frac{1}{أ}$ = 1 × أَ = أَ

إن مقلوب أ هو حاصل قسمة 1 على أ أو هو نسبة 1 إلى أ .

• إذا كان $أ = 1$ فإن : $أ^{-1} = 1$
ومنه : $أ^{-1}$ ب = ب . فنستنتج أنه :

من أجل كل حقيقي ب : $\frac{ب}{1} = ب$

• لديك : $\frac{ب}{أ} = ب \times أ^{-1}$

ولديك ايضاً : $أ \times أ^{-1} = 1$ وَ $أ \neq 0$. ومنه : $أ^{-1} \neq 0$
نستنتج أن :

$\frac{ب}{أ} = 0$ إذا وفقط إذا كان : $ب = 0$

2.1 . القسمة في ح :

حسب نظرية الفقرة 1 . 1 تستطيع أن ترفق بكل ثنائية مرتبة (ب ، أ)

من ح × ح* العدد الحقيقي $\frac{ب}{أ}$ الذي هو حاصل قسمة ب على أ .
فتكون قد عينت هكذا تطبيقاً من ح × ح* في ح .

تعريف :

إن التطبيق من ح × ح* في ح الذي يرفق بكل ثنائية مرتبة (ب ، أ) من ح × ح* حاصل القسمة $\frac{ب}{أ}$ هو **القسمة في ح** .

أ) أوجد حصرا من المرتبة الثالثة لمقلوب 4,3 ثم أوجد حصراً من المرتبة 3 للعدد الحقيقي $\frac{5,4}{4,3}$

ب) أوجد حاصل قسمة 35 على 19 متابعاً القسمة حتى يظهر لك حاصل قسمة هو نشر عشري غير محدود هل هذا النشر دوري ؟

جـ) هل القسمة في ح عملية داخلية في ح ؟

1 ، 3 تساوي نسبتين :

• $\frac{أ}{ب}$ ، $\frac{جـ}{ء}$ نسبتان بحيث : $\frac{أ}{ب} = \frac{جـ}{ء}$

سم س حاصل قسمة أ على ب ، س هو أيضاً حاصل قسمة جـ على د .

لديك : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \text{س}$

تعلم أن : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \text{س}$ تعني : أ = ب س

$\frac{\text{جـ}}{\text{د}} = \text{س}$ تعني : جـ = د س

لديك : أ = ب س ومنه : أ د = (ب س) . د

لكن (ب س) د = (ب د) س ، ومنه : أ د = (ب د) س

لديك : جـ = د س ومنه : ب جـ = ب (د س)

لكن : ب (د س) = (ب د) س ، ومنه : ب جـ = (ب د) س

حصلت على : أ د = (ب د) س ، ب جـ = (ب د) س

نستنتج أن : أ د = ب جـ

انك برهنت أنه :

إذا كان : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}} = \frac{\text{جـ}}{\text{د}}$ فإن : أ د = ب جـ

- $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}$ ، $\frac{\text{جـ}}{\text{د}}$ نسبتان بحيث : أ د = ب جـ

ب$^{-1}$ هو مقلوب ب

لديك : أ د = ب جـ ومنه : (أ د) ب$^{-1}$ = (ب جـ) ب$^{-1}$

لكن : (ب جـ) ب$^{-1}$ = (ب ب$^{-1}$) جـ = جـ ومنه : (أ د) ب$^{-1}$ = جـ

لكن : (أ د) ب$^{-1}$ = (أ ب$^{-1}$) د ومنه : (أ ب$^{-1}$) د = جـ

حصلت على : (أ ب$^{-1}$) د = جـ

نستنتج أن : [(أ ب$^{-1}$) د] د$^{-1}$ = جـ د$^{-1}$

لكن : [(أ ب$^{-1}$) د] د$^{-1}$ = (أ ب$^{-1}$) (د د$^{-1}$) ومنه : د د$^{-1}$ = 1

ومنه : [(أ ب$^{-1}$) د] د$^{-1}$ = أ ب$^{-1}$

تستنتج أن : أ ب$^{-1}$ = جـ د$^{-1}$

لكن : $أ ب^{-1} = \frac{أ}{ب}$ و $ح ء^{-1} = \frac{ح}{ء}$ ومنـه : $\frac{أ}{ب} = \frac{ح}{ء}$

انك برهنت انه إذا كان : $أ ء = ب ح$ فإن $\frac{أ}{ب} = \frac{ح}{ء}$

إنك قد برهنت أن :

$\frac{أ}{ب} = \frac{ح}{ء}$ إذا وفقط اذا كان $أ ء = ب ح$

4.1 النسب المساوية لنسبة معطاة :

س هو نسبة العدد الحقيقي ب إلى العدد الحقيقي غير المعدوم أ ؛
ك عدد حقيقي غير معدوم .

لديك : $س = \frac{ب}{أ}$. هذا يعنى ان : $أ س = ب$

تستنتج ان : $(أ س) ك = ب ك$

لكن : $(أ س) ك = (أ ك) س$ ومنه $(أ ك) س = ب ك$

وهذا يعنى أن : $\frac{ب ك}{أ ك} = س$

نستنتج أن : $\frac{ب}{أ} = \frac{ب ك}{أ ك}$

إنك قد برهنت النظرية التالية :

نظريــة :

إذا كان ب عدداً حقيقياً وكان أ و ك عددين حقيقيين غير معدومين فإن :
$\frac{ب}{أ} = \frac{ب ك}{أ ك}$.

إن هذه النظرية تسمح لك عملياً بتعويض النسبة $\frac{ب ك}{أ ك}$ بالنسبة $\frac{أ}{ب}$

وتقول إنك اختزلت النسبة $\frac{ب ك}{أ ك}$ على ك

ا) أوجد نسباً مساوية للنسبة $\frac{4}{15,2}$ بحيث مقاماتها على التوالي هـي :

– 30,4 ؛ 152 ؛ 45,6 ، – 76 .

ب) أوجد نسباً مساوية للنسبة $\frac{-6,2}{41,5}$ بحيث بسوطها على التوالي

هي : 18,6 ؛ – 31 ؛ 124 ؛ – 0,31 .

حـ) اختزل النسب الآتية :

$\frac{205,2}{-108,36}$ ؛ $\frac{-0,085}{0,068}$ ؛ $\frac{0,75}{-3,5}$ ؛ $\frac{-2,4}{-3,6}$ ؛ $\frac{1,085}{-0,62}$ ؛ $\frac{113,9}{-48,45}$.

5.1. توحيد مقامي نسبتين :

$\frac{ا}{ب}$ ، $\frac{حـ}{ى}$ نسبتان :

تعلم أن : $\frac{ا}{ب} = \frac{ا ى}{ب ى}$ وان : $\frac{حـ}{ى} = \frac{ب حـ}{ب ى}$

إن للنسبتين $\frac{ا ى}{ب ى}$ ، $\frac{ب حـ}{ب ى}$ نفس المقام وانهما تساويان على الترتيب :

$\frac{ا}{ب}$ ، $\frac{حـ}{ى}$.

تقول إنك **وحدت** مقامي النسبتين $\frac{ا}{ب}$ ، $\frac{حـ}{ى}$.

6،1. القيمة المطلقة لنسبة :

س هو نسبة العدد الحقيقي ب إلى العدد الحقيقي غير المعدوم ا .

لديـــك : س = $\frac{ب}{ا}$. هذا يعنى أن : ا س = ب

وتعلم أن : | ا س | = | ا | . | س|

ومنه : | ب | = | ا | . | س |

ومنه أيضاً : $|س| = \frac{|ب|}{|أ|}$

تستنتج أن : $\left|\frac{ب}{أ}\right| = \frac{|ب|}{|أ|}$

أ) وحد مقامي:

$\frac{7,6}{30}$ و $\frac{-9}{30}$ ؛ $\frac{15}{-12,5}$ و $\frac{-4}{7}$ ؛ $\frac{4,2}{0,64}$ و $\frac{0,7}{-4,8}$

ب) أ ، ب عددان حقيقيان بحيث : أ $\neq -1$ ، ب $\neq -1$

وحد مقامي $\frac{1}{أ + 1}$ و $\frac{1}{ب + 1}$

ج) س ، ع عددان حقيقيان بحيث :

س $\neq 1$ ؛ س $\neq 2$ ؛ س $\neq -2$ ؛ ع $\neq 1$

وحد مقامي : $\frac{س}{س - 2}$ و $\frac{-5,1}{س + 2}$ ؛ $\frac{3س}{1 - س}$ و $\frac{3ع}{1 - ع}$

د) س ، ع عددان حقيقيان بحيث : ع $\neq 0$.

برهن أن : $\left|\frac{-س}{ع}\right| = \left|\frac{س}{-ع}\right| = \left|\frac{س}{ع}\right|$

---

2 ـ العمليات على نسب الأعداد الحقيقية

2 ، 1 مجموع نسبتين :

• س هو نسبة العدد الحقيقي ب إلى العدد الحقيقي غير المعدوم أ .

س َ هو نسبة العدد الحقيقي بَ إلى العدد الحقيقي غير المعدوم أَ .

لديك : س = $\frac{ب}{أ}$. هذا يعنى أن : أ س = ب

لديك : سَ = $\frac{بَ}{أَ}$ هذا يعنى أن : أَ سَ = بَ

تستنتج أن : أَ (أ س) = أَ ب و : أ (أَ سَ) = أ بَ

لكن : أَ (أ س) = (أ أَ) س و : أ (أَ سَ) = (أ أَ) سَ

ومنه : (أَ أ) س = أَ ب و : (أ أَ) سَ = أ بَ

تستنتج أن : (أَ أ) س + (أ أَ) سَ = أَ ب + أ بَ

لكن أَ أ = أ أَ

ومنه : (أَ أ) س + (أ أَ) سَ = (أ أَ) س + (أ أَ) سَ

لكن : (أَ أ) س + (أ أَ) سَ = أ أَ (س + سَ)

ومنه : أ أَ (س + سَ) = أَ ب + أ بَ

إن العدد الحقيقي أ أَ غير معدوم . تستنتج أن العدد الحقيقي س + سَ هو نسبة العدد الحقيقي أَ ب + أ بَ إلى العدد الحقيقي غير المعدوم أ أَ

يمكنك ان تكتب : $\text{س} + \text{سَ} = \frac{\text{أَ ب} + \text{أ بَ}}{\text{أ أَ}}$

فتكون قد برهنت أن :

$$\frac{\text{ب}}{\text{أ}} + \frac{\text{بَ}}{\text{أَ}} = \frac{\text{أَ ب} + \text{أ بَ}}{\text{أ أَ}}$$

• برهن أن : $\frac{\text{ب}}{\text{أ}} + \frac{\text{بَ}}{\text{أ}} = \frac{\text{ب} + \text{بَ}}{\text{أ}}$

2 . 2 نظير نسبة :

س هو نسبة العدد الحقيقي ب إلى العدد الحقيقي غير المعدوم أ .

لديك : $\text{س} = \frac{\text{ب}}{\text{أ}}$

• تعلم أن معاكس س هو − س

إن معاكس النسبة $\frac{\text{ب}}{\text{أ}}$ هو النسبة : $-\frac{\text{ب}}{\text{أ}}$

إن العددين الحقيقيين س ، − س معاكسان لبعضهما البعض .

ان النسبتين $\frac{ب}{أ}$ ، $-\frac{ب}{أ}$ معاكستان لبعضهما البعض .

• لديك : $أ\,س = ب$

تعلم أن : $(-أ)(-س) = أ\,س$

ومنه : $(-أ)(-س) = ب$ ومنه : $-س = \frac{ب}{-أ}$

تستنتج أن : $-\frac{ب}{أ} = \frac{ب}{-أ}$

• تعلم أن : $أ(-س) = -أ\,س$

لكن : $-أ\,س = -ب$ ومنه : $أ(-س) = -ب$

ومنه : $-س = \frac{-ب}{أ}$ وتستنتج أن : $-\frac{ب}{أ} = \frac{-ب}{أ}$

وتستخلص أن :

$$\boxed{-\frac{ب}{أ} = \frac{ب}{-أ} = \frac{-ب}{أ}}$$

2 . 3 فرق نسبتين :

س هو نسبة العدد الحقيقي ب الى العدد الحقيقي غير المعدوم أ

سَ هو نسبة العدد الحقيقي بَ إلى العدد الحقيقي غير المعدوم أَ

تعلم أن : $س - سَ = س + (-سَ)$

تستنتج أن :

$$\frac{ب}{أ} - \frac{بَ}{أَ} = \frac{ب}{أ} + \left(-\frac{بَ}{أَ}\right)$$

لكن : $-\frac{بَ}{أَ} = \frac{-بَ}{أَ}$

ومنه : $\frac{ب}{أ} + \left(-\frac{بَ}{أَ}\right) = \frac{ب}{أ} + \frac{-بَ}{أَ}$

لكن : $\frac{ب}{أ} + \frac{-بَ}{أَ} = \frac{أَ\,ب + أ(-بَ)}{أ\,أَ}$

وَ : $أَ\,ب + أ(-بَ) = أَ\,ب + (-أ\,بَ) = أَ\,ب - أ\,بَ$

ومنه : $\boxed{\frac{\text{ب}}{\text{ا}} - \frac{\text{بَ}}{\text{اَ}} = \frac{\text{اَب} - \text{ابَ}}{\text{ااَ}}}$

• برهن أن : $\frac{\text{ب}}{\text{ا}} - \frac{\text{بَ}}{\text{ا}} = \frac{\text{ب} - \text{بَ}}{\text{ا}}$

ا) أحسب : $\frac{14{,}53}{-4{,}2} + \frac{-2{,}3}{2{,}7}$ ؛ $12 + \frac{-42{,}8}{6{,}45}$ ،

$$\frac{-18{,}41}{24{,}6} - \frac{21{,}8}{-3{,}52}$$

ب) س ، ع عددان حقيقيان بحيث : $\text{ع} \neq 0$

برهن أن : $-\frac{-\text{س}}{\text{ع}} = -\frac{\text{س}}{-\text{ع}} = \frac{\text{س}}{\text{ع}}$

4.2. جداء نسبتين :

س هو نسبة العدد الحقيقي ب الى العدد الحقيقي غير المعدوم ا .
سَ هو نسبة العدد الحقيقي بَ إلى العدد الحقيقي غير المعدوم اَ .

لديك : $\text{س} = \frac{\text{ب}}{\text{ا}}$. هذا يعنى ان : ا س = ب

لديك : $\text{سَ} = \frac{\text{بَ}}{\text{اَ}}$ هذا يعنى أن : اَ سَ = بَ

تستنتج أن : (ا س) . (اَ سَ) = ب بَ
لكن : (ا س) (اَ سَ) = (ا اَ) (س سَ)
ومنه : (ا اَ) (س سَ) = ب بَ
أن العدد الحقيقي ا اَ غير معدوم .
تستنتج أن العدد الحقيقي س سَ هو نسبة العدد الحقيقي ب بَ إلى العدد الحقيقي غير المعدوم ا اَ .

يمكنك أن تكتب : $س س' = \frac{ب ب'}{أ أ'}$

فتكون قد برهنت أن :

$$\boxed{\frac{ب}{أ} \times \frac{ب'}{أ'} = \frac{ب ب'}{أ أ'}}$$

لاحظ أنه :

- إذا كان $أ = 1$ فإن : $ب \times \frac{ب'}{أ'} = \frac{ب ب'}{أ'}$
- وإذا كان $أ' = 1$ فإن : $\frac{ب}{أ} \times ب' = \frac{ب ب'}{أ}$

2 . 5 قـوة نسبـة :

س هو نسبة العدد الحقيقي ب إلى العدد الحقيقي غير المعدوم أ . ن عدد طبيعي

تعلم أن : $س^ن = \underbrace{س \times س \times س \times ...... \times س}_{ن\ عامـلا}$

لديك : $س = \frac{ب}{أ}$

تستنتج أن : $\left(\frac{ب}{أ}\right)^ن = \underbrace{\frac{ب}{أ} \times \frac{ب}{أ} \times \frac{ب}{أ} \times ...... \times \frac{ب}{أ}}_{ن\ عامـلا}$

لكن : $\underbrace{\frac{ب}{أ} \times \frac{ب}{أ} \times ...... \times \frac{ب}{أ}}_{ن\ عامـلا} = \frac{\overbrace{ب \times ب \times ...... \times ب}^{ن\ عامـلا}}{\underbrace{أ \times أ \times ...... \times أ}_{ن\ عامـلا}}$

تستنتج أن : $\left(\frac{ب}{أ}\right)^ن = \frac{ب^ن}{أ^ن}$

6.2 . مقلوب نسبة :

س هو نسبة العدد الحقيقي غير المعدوم ب إلى العدد الحقيقي غير المعدوم أ

لديك : $س = \frac{ب}{أ}$

تعلم أن مقلوب العدد الحقيقي غير المعدوم س هو العدد الحقيقي $\frac{1}{س}$ الـــذي

يمكنك أن ترمز له بالرمز $س^{-1}$

ولديك : $س \times س^{-1} = 1$

ولديك أيضاً : $\frac{ب}{أ} \times \frac{أ}{ب} = \frac{ب أ}{ب أ} = 1$

ولكـــن : $\frac{ب}{أ} = س$ ومنه : $س \times \frac{ب}{أ} = 1$

ولكـــن : $س \times س^{-1} = 1$ ومنه : $س \times س^{-1} = س \times \frac{أ}{ب}$

لديـــك : $س \times س^{-1} = س \times \frac{أ}{ب}$ و $س \neq 0$

تستنتج أن : $س^{-1} = \frac{أ}{ب}$

يمكنك أن تكتب : $\left(\frac{ب}{أ}\right)^{-1} = \frac{أ}{ب}$

7.2 . حاصل قسمة نسبتين :

- س هو نسبة العدد الحقيقي ب إلى العدد الحقيقي غير المعدوم أ .

  سَ هو نسبة العدد الحقيقي غير المعدوم بَ إلى العدد الحقيقي غير المعدوم أَ .

تعلم أن : $\frac{س}{سَ} = س \times \frac{1}{سَ}$

لكـــن : $س = \frac{ب}{أ}$ ، $\frac{1}{سَ} = \frac{أَ}{بَ}$

تستنتج أن : $\frac{\text{س}}{\text{س}'} = \frac{\text{ب}}{\text{أ}} \times \frac{\text{أ}'}{\text{ب}'}$

ولكن : $\frac{\text{ب}}{\text{أ}} \times \frac{\text{أ}'}{\text{ب}'} = \frac{\text{ب}\,\text{أ}'}{\text{أ}\,\text{ب}'}$ ومنه : $\frac{\text{س}}{\text{س}'} = \frac{\text{ب}\,\text{أ}'}{\text{أ}\,\text{ب}'}$

فتكون قد برهنت أن :

$$\frac{\frac{\text{ب}}{\text{أ}}}{\frac{\text{ب}'}{\text{أ}'}} = \frac{\text{ب}}{\text{أ}} \times \frac{\text{أ}'}{\text{ب}'} = \frac{\text{ب}\,\text{أ}'}{\text{أ}\,\text{ب}'}$$

• تلاحظ انــه :

إذا كان : $\text{أ} = 1$ فإن : $\frac{\text{ب}}{\frac{\text{ب}'}{\text{أ}'}} = \frac{\text{ب}\,\text{أ}'}{\text{ب}'}$

إذا كان : $\text{أ}' = 1$ فإن : $\frac{\frac{\text{ب}}{\text{أ}}}{\text{ب}'} = \frac{\text{ب}}{\text{أ}\,\text{ب}'}$

أ) أحسب : $\frac{-2{,}64}{3{,}2} \times \frac{4{,}5}{-6{,}7}$ ؛ $\frac{3{,}45}{-7{,}3} \times 8{,}1$

ب) أحسب : $\left(\frac{-3{,}5}{5{,}41}\right)^3$ ؛ $\left(\frac{2{,}15}{-4{,}3}\right)^4$

حـ) أحسب : $\frac{\text{س}}{\text{ع}}$ في كل من الحالات الآتية :

$\text{س} = \frac{-5{,}4}{-1{,}5}$ ، $\text{ع} = \frac{4{,}5}{0{,}7}$ ؛ $\text{س} = \frac{-7{,}2}{8{,}5}$ ، $\text{ع} = -\frac{0{,}68}{5{,}41}$

$\text{س} = \frac{27{,}3}{-8{,}4}$ ، $\text{ع} = 5{,}7$ ؛ $\text{س} = -3{,}41$ ، $\text{ع} = \frac{-12{,}6}{5{,}41}$

تمارين :

1 . 1) أوجد حصرا من المرتبة 4 لمقلوب العدد الحقيقي 0,65

2) عين النشر العشري غير المحدود الذي يمثل مقلوب العدد 0,65

2 . 1) أوجد حصرا من المرتبة 4 لمقلوب العدد الحقيقي 3,5 .

2) عين النشر العشري الغير محدود الذي يمثل مقلوب 3,5 .

3 . 1) عين النشر العشري الدوري الذي يمثل مقلوب العدد الحقيقي 3,25 .
أكتب 15 عشرياً على الأقل من هذا النشر .

2) استخدم السؤال السابق لكي تعين العدد الحقيقي س بحيث :
3,25 س = 11,6
أظهر دورية النشر العشري غير المحدود للعدد الحقيقي س .

3) أوجد من جديد النتيجة السابقة بحساب حاصل قسمة 11,6 على 3,25 .

4 . نسبـــة عدد حقيقي س إلى العدد الحقيقي ... $3,7\underline{7}$ هي ... $2,314\underline{14}$.

إعط القيمة المقربة إلى $\frac{1}{10^3}$ بالنقصان للعدد س .

5 . حاصل قسمة عدد حقيقي ا على العدد الحقيقي : − ... $0,43\underline{3}$ هي − ... $7,216\underline{6}$
اوجد العدد الحقيقي ا .

6 . ا ، ب ، حـ ثلاثة أعداد حقيقية بحيث : ا^2 = ب حـ

1) ما هي النسبة $\frac{ا}{ب}$ ؟

2) ما هي النسبة $\frac{ا}{حـ}$ ؟

3) ما هو العدد الحقيقي ب علماً بأن : ا = − 3,8 ، $\frac{ا}{ب}$ = 0,125 .

7 . أحسب حاصل قسمة العدد الحقيقي ا على العدد الحقيقي غير المعدوم ب في كل من الحلات الآتية :

1) ا = − 93,6 ؛ ب = − 12

2) ا = ... 0,3333 ؛ ب = ... $0,66\underline{6}$

3) ا = 17,5 ؛ ب = − 1,25

4) ا = − ... $0,833\underline{3}$ ؛ ب = ... $0,333\underline{3}$

8 . عين في كل حالة العدد الحقيقي س بحيث :

1) -7 س $= 6{,}3$ ؛ $8{,}1$ س $= 4{,}05$

2) $13{,}8$ س $= 13{,}8$ ؛ $\frac{48{,}7}{52{,}9}$ س $= 48{,}7$

3) $\frac{-12{,}6}{15{,}7}$ س $= 12{,}6$.

9 . عوض كلاً من النسب الآتية بنسبة مساوية حداها عددان طبيعيان أصغر ما يمكن :

$\frac{2{,}1}{0{,}35}$ ؛ $\frac{4{,}5}{10{,}5}$ ؛ $\frac{3{,}6}{50{,}4}$ ؛ $\frac{11{,}6}{0{,}29}$.

10. أوجد أربع نسب مساوية للنسبة $\frac{-13{,}2}{16{,}5}$ مقاماتها على الترتيب :

33 ؛ 15 ؛ -30 ؛ 40 .

11. 1) أوجد نسبة تساوي $\frac{23{,}4}{32{,}4}$ حيث حداها عددان طبيعيان أصغر ما يمكن .

2) أوجد نسبة تساوي $\frac{23{,}4}{32{,}4}$ حيث مجموع حديها : $58{,}9$.

12. وحد مقامات :

1) $\frac{3}{5}$ ، $\frac{5}{7}$. 2) $\frac{4}{9}$ ، $\frac{5}{3}$ ، $\frac{7}{6}$.

3) $\frac{5}{6}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{4}{3}$ . . 4) $\frac{9}{8}$ ، $\frac{7}{6}$ ، $\frac{-11}{4}$

13. وحد مقامــات :

1) $\frac{3}{8}$ ، $\frac{5}{7}$ ، $\frac{1}{2}$. 2) $\frac{5}{3}$ ، $\frac{10}{9}$ ، $\frac{15}{7}$.

3) $-\frac{6}{11}$ ، $\frac{9}{4}$. 4) $\frac{-4}{5}$ ، $\frac{6}{7}$ ، $\frac{10}{9}$

14. س ، ع عددان حقيقيان بحيث : س $\notin$ { -3 ، $\frac{1}{3}$ ، 1 ، 3 } ، ع $\neq \frac{1}{2}$

وحد مقامي :

1) $\frac{2\text{س}}{3\text{س} - 1}$ ، $\frac{-3,4\text{س}}{\text{س} + 3}$

2) $\frac{\text{س} - 2}{\text{س} - 3}$ ، $\frac{3\text{ع} + 1}{(\text{س} - 1)(2\text{ع} - 1)}$

15. 1) أوجد النشر العشري غير المحدود والدوري لكل من العددين الحقيقيين :

ا ، ب حيث : ا $= \frac{5}{7}$ ، ب $= \frac{7}{11}$.

2) عين النشر العشري غير المحدود الذي يمثل المجموع ا + ب إنطلاقاً من النشرين العشريين للعددين ا و ب

3) عين النشر العشري غير المحدود الذي يمثل المجموع ا + ب وذلك بحساب مجموع النسبتين ا ، ب .

16. نفس السؤال بالنسبة للعددين الحقيقيين ا ، ب بحيث :

ا $= \frac{-5}{13}$ ، ب $= \frac{7}{9}$

17. أحسب الأعداد الحقيقية الآتية :

1) $\frac{3}{5} - \frac{5}{2} + \frac{7}{4}$ ، $\frac{9}{8} - \frac{5}{6} + \frac{3}{4}$

2) $\frac{5}{7} + \frac{3}{4} - \frac{1}{3}$ ، $\frac{5}{9} + \frac{7}{3} - \frac{11}{6}$

3) $\frac{5}{8} - \frac{7}{6} + 2$ ؛ $3,5 - \frac{4}{3} + \frac{1}{2}$ ؛ $\frac{3}{7} - 1 + \frac{1}{3}$

18. أحسب العددين الحقيقيين الآتيين :

1) $\frac{26,41}{-3,8} + \frac{7,91}{4,5} - \frac{12,45}{8,2}$

2) $\frac{18,75}{42,8} - \frac{24,3}{-6,52} + \frac{4,27}{10,54}$

19. أحسب الأعداد الحقيقية الآتية :

1) $\frac{-0,59}{7,8}\times\frac{6,1}{-6,2}$ ؛ $\frac{-8,2}{0,75}\times\frac{0,65}{-5,8}$.

2) $\frac{5}{11}\times\frac{-6,8}{25}\times\frac{7,5}{4}$ ؛ $\frac{4,7}{-5,2}\times\frac{24,32}{8,1}\times\frac{-6,7}{12,3}$.

3) $\frac{125}{-11}\times\frac{-77}{50}\times\frac{70}{70}\times\frac{308}{40}$

20. أحسب الأعداد الحقيقية الآتية :

1) $\left(\frac{2,35}{-3,8}\right)^2$ ؛ $\left(-\frac{6,8}{12,4}\right)^3$ ؛ $\left(\frac{0,15}{-10,5}\right)^4$.

2) $\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^3$ ؛ $\left(\frac{2}{5}\right)^3\times\left(\frac{4}{3}\right)^2$

21. أحسب الأعداد الحقيقية الآتية :

1) $\left(\frac{0,6\times 0,2}{44,8-32,7}\right)^2$

2) $\left[\frac{24,6-8,5-2,3}{(-3)^2+(2,5)^3+0,45}\right]^{-1}$

3) $\left(\frac{5}{3}\right)^{-2}\times\left[\left(-\frac{8}{7}\right)^4+\left(\frac{4}{5}\right)^{-2}\right]^2$

4) $\left(-\frac{4}{7}\right)^2\times\left[\left(-\frac{9}{4}\right)^4+\left(\frac{-12}{5}\right)^{-3}\right]^0$

22. ا عددحقيقي غير معدوم ، اختزل كلاً من الأعداد الحقيقية الآتية :

1) $\frac{a^3\,a^5}{a^2}$ ؛ $\frac{a^{-4}\,a^2}{a^4}$ ؛ $\frac{a^3\,a^2\,a^{-5}}{a^{-2}}$ ؛ $\frac{a^5\,a^{-3}\,a}{a^2\times a^{-4}\times a^3}$

2) $\frac{a^2\times a^5}{a^7}$ ؛ $\frac{a^{-2}\times a^{-3}}{a^{-1}\times a^{-4}}$ ؛ $\frac{a^3\times a^{-2}}{a^5\times a^{-7}}$ ؛ $\frac{a^{-2}\times a^3\times a^{-4}}{a^{10}\times a^{-2}\times a^{-8}}$

23. عين مقلوب كل من النسب الآتية :

$\frac{5}{9}$ ؛ $\frac{-3}{7}$ ؛ 2 ؛ $\frac{11}{4}$ ؛ $\frac{1}{5}$

24. أ ، ب عددان حقيقيـان بحيث : $أ = -\frac{7}{8}$ ، $ب = \frac{-3}{11}$

1) ماهو المقلوب $أَ$ للعدد أ ؟ ما هو المقلوب $بَ$ للعدد ب ؟

2) أحسب $أ \times ب$ ، $أَ \times بَ$

3) س ، ع عددان حقيقيان غير معدومين . برهن أن :

$(س \times ع)^{-1} = س^{-1} \times ع^{-1}$

25. عين في كل حالة على شكل نسبة العدد الحقيقي س حيث :

1) حاصل قسمة س على $-\frac{9}{4}$ هو $\frac{17}{15}$

2) حاصل قسمة س على -7 هو $\frac{5}{8}$.

3) حاصل قسمة $\frac{-7}{9}$ على س هو $\frac{11}{14}$.

4) حاصل قسمة -11 على س هو $\frac{-9}{8}$.

5) حاصل قسمة $\frac{5}{11}$ على $-\frac{3}{8}$ هو س .

26. س ، ع ، ص ، أ ، ب أعداد حقيقية بحيث :

$س = \frac{2أ - 6ب}{4}$ ؛ $ع = \frac{3أ - 9ب - 3}{6}$ ؛ $ص = \frac{-12أ + 36ب}{24}$

1) اختزل كلاً من النسب س ، ع ، ص .

2) أحسب : س + ع + ص .

27. عين في كل حالة عددين حقيقيين أ ، ب بحيث :

1) $أ \times ب^{-1} = 1,5$ ، $أ^{-1} = 0,3$

2) $أ \times ب^{-1} = -1,5$ ، $أ^{-1} = -0,3$

3) $أ^{-1} \times ب = -1,55$ ، $أ^{-1} = -2$.

6	الجـذر الـتربيعي

1 ـ الجذر التربيعي لعدد حقيقي موجب

1.1. الجذر التربيعي التام لعدد حقيقي موجب :

• يمكنك أن ترفق بكل عدد حقيقي موجب سـ مربعه سـ^2 الذي هو عدد حقيقي موجب .

تعرف هكذا تطبيقاً تا من ح+ في ح+ :

تا : ح+ ← ح+

سـ ← سـ^2

لديك : تا (0) = 0 ؛ تا ($\frac{3}{4}$) = $\frac{9}{16}$ ؛ تا (0,4) = 0,16

• هل يوجد عدد حقيقي موجب سـ بحيث : سـ^2 = 0,36 ؟

نعم ، هو العدد الحقيقي 0,6 .

تلاحظ أن 49 ؛ $\frac{25}{4}$ ؛ 0,0121 هي صور 7 ؛ $\frac{5}{2}$ ؛ 0,11 على الترتيب بواسطة التطبيق تا .

تقبل أن :

من أجل كل عدد حقيقي موجب ا ، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب سـ بحيث سـ^2 = ا

لنبين أن هذا العدد الحقيقي وحيد .

إذا لم يكن كذلك فسيوجد إذا عدد حقيقي موجب آخر ع مختلف عن سـ بحيث ع^2 = ا

عندئذ يكون لديك : س^2 = ا و ع^2 = ا

ستستنتج أن : س^2 − ع^2 = 0 و (س + ع) (سـ − ع) = 0

إذا لم يكن العددان الحقيقيان الموجبان سـ وَ ع معدومين معاً فإن سـ + ع لا يكون معدوماً وتستنتج أن : سـ − ع = 0 ومنه سـ = ع

ولكن سـ ≠ ع

إذا كان العددان سـ و ع معدومين معاً يكون لديك : سـ = ع . لكن ع ≠ سـ

لا يوجد إذن عدد حقيقي آخر ع ، مختلف عن سـ بحيث أن: $ع^2 = ا$

تقبل النظرية الآتية :

نظرية :

من أجل كل عدد حقيقي موجب ا يوجد عدد حقيقي موجب واحد فقط سـ بحيث $سـ^2 = ا$

تعريف :

ان الجذر التربيعي لعدد حقيقي موجب ا هو عدد حقيقي موجب سـ بحيث $سـ^2 = ا$

ترمز للجذر التربيعي للعدد الحقيقي الموجب ا بالرمز : $\sqrt{ا}$

وتقرأ : الجذر التربيعي للعدد ا .

يمكنك أن تقول إن $\sqrt{ا}$ هو **الجذر التربيعي التام** للعدد الحقيقي الموجب ا

ان الرمز $\sqrt{\ }$ يسمى رمز الجذر .

تكتب : سـ = $\sqrt{ا}$ وتقرأ : سـ يساوي الجذر التربيعي للعدد ا .

تذكر أن :

سـ = $\sqrt{ا}$ يعني $سـ^2 = ا$

تلاحظ أن $(\sqrt{ا})^2 = ا$

وتلاحظ أيضاً أن $0^2 = 0$. تستنتج أن $\sqrt{0} = 0$

• تا تطبيق من ح+ في ح+ بحيث : تا (سـ) = $سـ^2$

حسب النظرية السابقة يوجد من أجل كل عدد حقيقي موجب ا

عدد حقيقي موجب واحد فقط سـ بحيث تا (سـ) = أ

هذا يعني أن كل عدد حقيقي موجب سـ هو صورة بالتطبيق تا لعدد حقيقي موجب واحد فقط .

تستنتج أن التطبيق تا هو تقابل من ح+ في ح+

• ب عدد حقيقي موجب .

تعرف أنه يوجد عدد حقيقي موجب واحد فقط : جـ بحيث $جـ^2 = ب$

نستنتج أن $\sqrt{ب} = جـ$

يمكنك ان ترفق بكل عدد حقيقي موجب جذره التربيعي الذي هو عدد حقيقي موجب .

تعرّف هكذا تطبيقاً من ح+ في ح+ . سمه تاَ

تاَ هو التطبيق من ح+ في ح+ الذي يرفق بكل عدد حقيقي موجب جذره التربيعي :

$$تاَ : ح^+ \rightarrow ح^+$$
$$سـ \mapsto \sqrt{سـ}$$

أ) أوجد : $\sqrt{1600}$ ؛ $\sqrt{0,81}$ ؛ $\sqrt{0,64}$ ؛ $\sqrt{0,04}$

ب) باستعمال جدول المربعات أوجد :

$\sqrt{256}$ ؛ $\sqrt{4225}$ ؛ $\sqrt{9409}$ ؛ $\sqrt{5184}$.

2.1 . المربــع الكامــل :

• تعرف أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب أ ، يوجد عدد حقيقي موجب واحد فقط سـ بحيث $سـ^2 = أ$.

في حالة ما إذا كان العدد الحقيقي سـ عدداً طبيعياً تقول :

إن أ **مربع كامل** .

• ع عدد طبيعي، تستنتج أن $ع^2$ مربع كامل .

$ب^{ن} . جـ^{هـ} . د^{و}$ هو التحليل إلى جداء عوامل أولية للعدد الطبيعي ع .

ومنه : $ع^2 = ب^{2ن} . جـ^{2هـ} . د^{2و}$ ، لديك : $ع = ب^{ن} . جـ^{هـ} . د^{و}$

ان الأعداد الطبيعية 2 ن ، 2 هـ ، 2 و كلها زوجية .

بينت أنه :

إذا كان عدد طبيعي مربعاً كاملا فإن كل الاسس التي تظهر في تحليله إلى جداء عوامل أولية زوجية .

- ص عدد طبيعي بحيث تحليله إلى جداء عوامل أولية هو
  $ف^{2ح}\ ق^{2ط}\ ك^{2ى}$

لديك : $ص = ف^{2ح} . ق^{2ط} . ك^{2ى}$ ومنه : $ص = (ف^{ح})^2 \times (ق^{ط})^2 \times (ك^{ى})^2$

ومنه $ص = (ف^{ح} . ق^{ط} . ك^{ى})^2$

تستنتج أن : ص هو مربع العدد الطبيعي $ف^{ح} . ق^{ط} . ك^{ى}$

بينت هكذا أنه :

إذا كانت كل الأسس التي تظهر في تحليل عدد طبيعي إلى جداء عوامل أولية زوجية فإن هذا العدد الطبيعي هو مربع كامل

برهنك هكذا على النظرية الآتية :

نظرية :

> يكون عدد طبيعي مربعا كاملا إذا وفقط إذا كانت كل أسس العوامل التي تظهر في تحليله إلى جداء عوامل أولية زوجية

أ) من بين الأعداد التالية ما هي مربعات الكاملة :

$2^4 \times 3^2 \times 5^4$ ؛ $3^2 \times 5^3 \times 7^6$ ؛ $2^4 \times 3^2 \times 5^4 \times 11$

$2^3 \times 3 \times 6$ ؛ $5 \times 3 \times 2^2 \times 15$ ؛ $2^2 \times 3^3 \times 5^2 \times 15$

12544 ؛ 1982 ؛ 4212 ؛ 17640 ؟

ب) اوجد الجذر التربيعي لكل من الأعداد التي هي مربعات كاملة في التمرين أ .

3.1. الجذر التربيعي وعلاقة الترتيب في ح .

- س عدد حقيقي موجب غير معدوم ، ع عدد حقيقي موجب تماماً ، بحيث س < ع

تستنتج أن : س + ع > 0 و س − ع < 0

وتستنتج أن : (س + ع) (س − ع) < 0

لكن : (س + ع) (س − ع) = س^2 − ع^2 ومنه س^2 − ع^2 0

تستنتج أن : س^2 < ع^2

انك بينت أنه : إذا كان : 0 ⩽ س < ع فإن س^2 < ع^2

- أ وَ ب عددان حقيقيان موجبان بحيث أ ⩽ ب

بين أن $\sqrt{أ}$ ⩽ $\sqrt{ب}$

إذا لم يكن كذلك يكون لديك $\sqrt{ب}$ < $\sqrt{أ}$

تستنتج أن : ($\sqrt{ب}$)^2 < ($\sqrt{أ}$)^2

لكن : ($\sqrt{ب}$)^2 = ب و ($\sqrt{أ}$)^2 = أ

تستنتج إذا أن : ب < أ لكن أ ⩽ ب

تستنتج أنه : إذا كان : أ ⩽ ب فإن $\sqrt{أ}$ ⩽ $\sqrt{ب}$.

أ) تحقق من أن : 41^2 ⩽ 1620 < 42^2 ؛ 72^2 ⩽ 5248 < 73^2

88^2 ⩽ 7854 < 89^2

ب) باستعمال جدول المربعات ، أوجد في كل حالة ، عدداً طبيعياً س بحيث :

س^2 ⩽ 1143 < (س + 1)^2

س^2 ⩽ 4200 < (س + 1)^2

$\sqrt{س}$ ⩽ $\sqrt{8544}$ < $\sqrt{س + 1}$

جـ) تحقق من أن : 23^2 ⩽ 572 < 24^2

باستعمال الحصر السابق كيف تجد الحصر 230^2 ⩽ 57200 < 240^2

احسب : 238^2 و 239^2

أوجد عدداً طبيعياً ن بحيث $\sqrt{ن}$ ⩽ $\sqrt{57253}$ < $\sqrt{ن + 1}$

4.1. حالات خاصة لايجاد الجذر التربيعي :

- لديك : $100 \times 5184 = 518400$

يعطيك جدول المربعات : $72^2 = 5184$

تستنتج أن : $720^2 = (10 \times 72)^2 = 10^2 \times 72^2 = 518400$

وتستنتج أن : $720 = \sqrt{518400}$

- لديك : $\left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{7^2}{3^2} = \frac{49}{9}$

تستنتج أن : $\frac{7}{3} = \sqrt{\frac{49}{9}}$

- لديك : $\frac{49}{144} = \frac{98}{288}$

لكن : $\left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{7^2}{12^2} = \frac{49}{144}$ ومنه $\frac{7}{12} = \sqrt{\frac{98}{288}}$

حلل العدد الطبيعي 260 100 إلى جداء عوامل أولية

تحصل على : $(17 \times 5 \times 3 \times 2)^2 = 260\,100$

تستنتج أن : $17 \times 5 \times 3 \times 2 = \sqrt{260\,100}$

ومنه : $510 = \sqrt{260\,100}$

أ) أوجد باستعمال جدول المربعات :

$\sqrt{246\,490\,000}$ ، $\sqrt{388\,900}$ ، $\sqrt{1\,254\,400}$

ب) أوجد : $\sqrt{\frac{150}{726}}$ ، $\sqrt{\frac{121}{2}}$ ، $\sqrt{\frac{81}{16}}$

ج) حلل إلى جداء عوامل أولية كلا من الأعداد الطبيعية الآتية ثم احسب جذرها التربيعي .

94 864 ، 59 049 ، 108 900 ، 933 156 ، 65 536

---

2 ـ الجذر التربيعي المقرب لعدد حقيقي موجب

2 . 1 . الجذر التربيعي الصحيح لعدد حقيقي موجب :

• س هو عدد حقيقي بحيث : $س = 3458{,}6$

باستعمال جدول المربعات تلاحظ أن :

$3364 = 58^2$ ؛ $3481 = 59^2$

تستنتج أن : $3364 < 3458{,}6 < 3481$

ومنه $58^2 < 3458{,}6 < 59^2$

ومنه أيضاً : $58 < \sqrt{3458{,}6} < 59$

تقول إن :

58 هو **الجذر التربيعي الصحيح بالنقصان للعدد الحقيقي** 3458,6

59 هو **الجذر التربيعي الصحيح بالزيادة للعدد الحقيقي** 3458,6

وتقول أيضاً إن :

58 هو **الجذر التربيعي المقرب إلى الوحدة بالنقصان للعدد** 3458,6

55 هو **الجذر التربيعي المقرب إلى الوحدة بالزيادة للعدد** 3458,6

تقبل النظرية الآتية :

نظرية :

> من أجل كل عدد حقيقي موجب س ، يوجد عدد طبيعي واحد فقط ا
> بحيث : $ا^2 \leqslant س < (ا + 1)^2$

تقول إن العدد الطبيعي ا هو **الجذر التربيعي الصحيح المقرب بالنقصان** للعذد الحقيقي س .

وتقول أيضاً إن ا هو **الجذر التربيعي المقرب إلى وحدة بالنقصان** للعدد س

تقول إن الفرق $س - ا^2$ هو **باقي** الجذر التربيعي الصحيح للعدد س

لديك : $ا^2 \leqslant س < (ا + 1)^2$

ومنه $ا^2 \leqslant س < ا^2 + 2ا + 1$

ومنه $0 \leqslant س - ا^2 < 2ا + 1$

ومنه أيضاً : $0 \leqslant \text{س} - \text{أ}^2 \leqslant 2\text{أ}$

وبهذا تكون قد برهنت النظرية الآتية :

نظرية :

> ان باقي الجذر التربيعي الصحيح لعدد حقيقي س يكون مساوياً على الأكثر ضعف هذا الجذر .

أ) أوجد باستعمال جدول المربعات الجذر التربيعي الصحيح المقرب على ا بالنقصان لكل من الاعداد الحقيقية الآتية :

2648 ؛ 36572,34 ؛ 23458,5 ؛ 15853,28 ؛ 5342,75

2.2 حساب الجذر التربيعي الصحيح لعدد حقيقي موجب :

لا يسمح جدول المربعات بحساب الجذر التربيعي الصحيح لكل الأعداد الحقيقية الموجبة .

مثال أول :

لحساب الجذر التربيعي الصحيح للعدد الطبيعي 87345 تستعمل الكيفية الآتية :
ارسم خطاً عمودياً واكتب العدد الحقيقي 87345 على يسار هذا الخط (شكل 1) جزء هذا العدد الحقيقي إلى أقسام في كل منها رقمين ابتداء من اليمين .
ان القسم الأول على اليسار يشمل في هذه الحالة رقماً واحداً وهو الرقم 8 ،
ان الجذر التربيعي الصحيح للعدد 8 هو 2.
تكتب 2 على يمين الخط العمودي وعلى نفس السطر بالنسبة للعدد 87345 (شكل 1)

8'73'45	295
4	
	$49 \times 9 = 441$
473	
441	$586 \times 6 = 3516$
3245	
2925	$585 \times 5 = 2925$
320	

« شكل 1 »

2 هو الرقم الأول من جهة اليسار للجذر المبحوث عنه .
مربع 2 هو 4 . اطرح 4 من 8 تحصل على 4 . على يمين 4 اكتب القسم الثاني 73 تقول إنك **تنزل** القسم الثاني ، وتحصل هكذا على العدد 473 .
ضعف جذر 8 هو 4 .
ارسم خطاً أفقياً تحت الرقم 2 .
اكتب 4 تحت هذا الخط (شكل 1)
ن هو أحد الأعداد الصحيحة الطبيعية المحصورة بين 0 و 9
ارمز بالرمز $\overline{\text{ن}4}$ للعدد المركب من رقمين بحيث يكون الجذاء ن × $\overline{\text{ن}4}$ اقرب ما يمكن من العدد 473 دون أن يفوقه .
تجد : 9 × 49 = 441
اكتب هذه النتيجة تحت الخط الأفقي (شكل 1)
9 هو الرقم الثاني للجذر المبحوث عنه . اكتبه على يمين الرقم 2 المحصل عليه سابقاً .
اطرح 441 من 473 . تجد 32 .
انزل القسم الثالث 45
تحصل على العدد 3245
ارسم خطاً أفقياً تحت الكتابة 9 × 49 = 441 (شكل 1)
اكتب تحت هذا الخط ضعف 29 أي العدد 58 .
م هو أحد الأعداد الطبيعية المحصورة بين 0 و 9 .
ارمز بالرمز $\overline{\text{م}58}$ للعدد المركب من ثلاثة أرقام بحيث يكون الجداء م × $\overline{\text{م}58}$ أقرب ما يمكن من العدد 3245 دون أن يفوقه .
تلاحظ بسرعة أن الأعداد 9 ، 8 ، 7 لا توافق .
جرب 6 تجد : 6 × 586 = 3516 .
لا يمكنك أن تطرح 3516 من 3245
6 لا تناسب ، تشطب إذا عن الكتابة 6 × 586 = 3516 (الشكل 1)
وتكتب على سطر آخر : 5 × 585 = 2925
اطرح 2925 من 3245 تجد 320

5 هو الرقم الثالث للجذر الذي تبحث عنه وهو الأخير

ان الجذر التربيعي الصحيح للعدد الحقيقي 87345 هو 295

باقي هذا الجذر هو 320 .

تحقق من أن $87345 = 295^2 + 320$

- تلاحظ أن عدد أرقام الجذر الناتج يساوي عدد أقسام العدد .
- يمكنك أن تبسط الوضع العملي المعطى في (شكل 1) بعدم كتابة الجداء الذي يطرح وبالكتابة المباشرة لنتائج الطرح (شكل 2)

87345	29
473	49 × 9
3245	585 × 5
320	

« شكل 2 »

لكي تطرح 9 × 49 من 473 تقول :

9 في 9 ، 81 من 83 يبقى 2

(تكتب 2 تحت الرقم 3 للعدد 473) .

وأحتفظ بـ : 8 .

9 في 4 ، 36 و 8 ، 44 من 47 يبقى 3 .

(تكتب 3 تحت الرقم 7 للعدد 473) .

مثال ثان :

عملا بنفس الطريقة السابقة احسب الجذر التربيعي الصحيح للعدد 7863725 (شكل 3)

إذا كان أحد الأرقام المجربة هو صفر يمكنك أن تكتبه مباشرة على يمين الجزء من الجذر الذي حصلت عليه وعلى يمين ضعف هذا الجزء

ثم يمكنك أن تنزل القسم التالي (شكل 4)

7863725	2804
386	48 × 8
0237	560 × 0
23725	5604 × 4
1309	

« شكل 3 »

7863725	2804
386	48 × 8
023725	5604 × 4
1309	

« شكل 4 »

مثال ثالث :

لكي تحسب الجذر التربيعي الصحيح للعدد الحقيقي 458236,73 تحسب الجذر التربيعي الصحيح للعدد الحقيقي 458236 (شكل 5)	

458236	67
982	127×7
09336	1346×6
1260	

« شكل 5 »

احسب الجذر التربيعي الصحيح لكل من الاعداد الحقيقية التالية :

أ) 43457 ، 58290 ، 91237 ، 62536

ب) 89623 ، 645237 ، 258951 ، 5125262,7

جـ) 796947 ، 4239704 ، 53629746 ، 87416799,36

3.2 . الجذر التربيعي المقرب لعدد حقيقي موجب :

- **مسألة أولى :**

أوجد عدداً طبيعياً أ بحيث :

$(أ \times 10^{-1})^2 \leqslant 5 \times 10^{-1} < [\,(أ + 1) \times 10^{-1}\,]^2$

هذا معناه أنه يجب أن تجد عدداً طبيعياً أ بحيث :

$أ^2 \times 10^{-2} \leqslant 5 \times 10^{-1} < (أ + 1)^2 \times 10^{-2}$

اضرب كل عدد من الأعداد العشرية $أ^2 \times 10^{-2}$ ؛ 5×10^{-1} ، $(أ+1)^2 \times 10^{-2}$

بالعدد العشري الموجب 10^2

تحصل على الحصر : $أ^2 \leqslant 50 < (أ + 1)^2$

إن جدول المربعات يعطيك حلا وحيداً : أ = 7

تحقق أنه لديك : $(7 \times 10^{-1})^2 \leqslant 5 \times 10^{-1} < (8 \times 10^{-1})^2$

لديك فعلا : $0,49 \leqslant 0,5 < 0,64$

تقول إن العدد الحقيقي **0,7 هو الجذر التربيعي المقرب إلى** $\frac{1}{10}$ **بالنقصان** للعدد الحقيقي 0,5 .

- **مسألة ثانية :**

اوجد عدداً طبيعياً أ بحيث يكون :

$$(\text{أ} \times 10^{-2})^2 \leqslant 385 \times 10^{-3} < [(\text{أ} + 1) \times 10^{-2}]^2$$

هذا معناه انه يجب ان نجد عدداً طبيعياً أ بحيث :

$$\text{أ}^2 \times 10^{-4} \leqslant 385 \times 10^{-3} < (\text{أ} + 1)^2 \times 10^{-4}$$

اضرب كلاً من الأعداد العشرية $\text{أ}^2 \times 10^{-4}$ ، 385×10^{-3} ، $(\text{أ} + 1)^2 \times 10^{-4}$ في العدد العشري الموجب 10^4 .

تحصل على الحصر : $\text{أ}^2 \leqslant 3850 < (\text{أ} + 1)^2$

إن جدول المربعات يعطيك حلا وحيداً : $\text{أ} = 62$

تحقق أنه لديك : $(62 \times 10^{-2})^2 \leqslant 385 \times 10^{-3} < (63 \times 10^{-2})^2$

لديك : $(0,62)^2 \leqslant 0,385 < (0,63)^2$

لديك فعلا : $0,3844 \leqslant 0,385 < 0,3969$

تقول إن العدد الحقيقي 0,62 هو **الجذر التربيعي المقرب إلى** $\frac{1}{100}$ **بالنقصان** للعدد الحقيقي 0,385 .

تقبل النظرية الآتية :

نظرية :

> من أجل كل عدد حقيقي موجب س ومن أجل كل عدد طبيعي ن يوجد عدد طبيعي واحد فقط أ بحيث :
>
> $$\left(\frac{\text{أ}}{10^{\text{ن}}}\right)^2 \leqslant \text{س} < \left(\frac{\text{أ} + 1}{10^{\text{ن}}}\right)^2$$

تقول إن :

العدد الحقيقي $\frac{\text{أ}}{10^{\text{ن}}}$ **هو الجذر التربيعي المقرب إلى** $\frac{1}{10^{\text{ن}}}$ **بالنقصان للعدد** الحقيقي س .

وتقول إن الفرق س $- \left(\frac{أ}{10^{ن}}\right)^2$ هو **باقي** هذا الجذر التربيعي

يمكنك أن تقول ايضاً ان $\frac{أ}{10^{ن}}$ هي **القيمة المقربة إلى** $\frac{1}{10^{ن}}$ **بالنقصان** للعدد الحقيقي $\sqrt{س}$

4.2 . حساب الجذر التربيعي المقرب لعدد حقيقي موجب :

س عدد حقيقي موجب ؛ $\frac{أ}{10}$ جذره التربيعي المقرب الى $\frac{1}{10}$ بالنقصان

- لديك : $\left(\frac{أ}{10^{ن}}\right)^2 \leqslant س < \left(\frac{أ+1}{10^{ن}}\right)^2$

تستنتج أن : $أ^2 \leqslant س . 10^{2ن} < (أ+1)^2$

وتستنتج أن العدد الطبيعي أ هو الجذر التربيعي الصحيح للعدد الحقيقي س . $10^{2ن}$

ومن هذا تستنتج القاعدة الآتية :

> لكي تحسب الجذر التربيعي المقرب إلى $\frac{1}{10^{ن}}$ بالنقصان للعدد الحقيقي س تضرب هذا العدد الحقيقي في العدد $10^{2ن}$ ، وتحسب بعد ذلك الجذر التربيعي الصحيح أ للعدد الحقيقي : س × $10^{2ن}$.
>
> إن الجذر التربيعي المقرب إلى $\frac{1}{10^{ن}}$ بالنقصان للعدد س يساوي $\frac{أ}{10^{ن}}$

- احسب الجذر التربيعي المقرب إلى $\frac{1}{10^2}$ بالنقصان للعدد الحقيقي 3244592,6 ابحث عن الجذر الصحيح للعدد 3244592,6 تحصل على 1801 (شكل 6)

3244592,6	1801
224	28 × 8
04592	3601 × 1
991	

« شكل 6 »

ان الجذر التربيعي الذي تبحث عنه يساوي $\frac{1801}{100}$ أي 18,01

- يمكنك أن تستعمل القاعدة السابقة بتتبع الكيفية الآتية :

تحسب أولا القيمة العشرية المقربة إلى $\frac{1}{10^{ن2}}$ بالنقصان للعدد الحقيقي س ،

تحسب بعدها الجذر التربيعي للقسم الصحيح للعدد الحقيقي المعطى .
تضع الفاصلة في الجذر وتواصل بعد ذلك الحساب بإنزال قسم مكون من رقمين عشريين أو صفرين في كل مرة .
ان عدد هذه الأقسام يساوي عدد الأرقام العشرية التي يجب ان تظهر في الجذر الذي تبحث عنه .

- احسب الجذر التربيعي المقرب الى $\frac{1}{10^{3}}$ بالنقصان للعدد $\frac{30}{7}$

ان القيمة العشرية المقربة إلى $\frac{1}{10^{6}}$ بالنقصان للعدد الحقيقي

$\frac{30}{7}$ هي 4,285714 (شكل 7)

أبحث الآن عن الجذر التربيعي الصحيح للعدد $4{,}285714 \times 10^{6}$
تحصل على 2.070 (شكل 8)

30	7
20	4,285714
60	
40	
50	
10	
30	
2	

« شـكل 7 »

4285714	207
02857	407 × 7
814	4140 × 0

« شـكل 8 »

أ) احسب الجذر التربيعي المقرب إلى $\frac{1}{10}$ بالنقصان لكل من الأعداد الحقيقية الآتية : 2 ، 3 ، 5 ، 11 ، 52

ب) احسب الجذر التربيعي المقرب إلى $\frac{1}{100}$ بالنقصان لكل من الأعداد الحقيقية الآتية : 2 ، 14,8 ، 6,52

جـ) احسب القيمة المقربة إلى $\frac{1}{10^3}$ بالنقصان لكل من الأعداد الحقيقية الآتية :

$\sqrt{146{,}492}$ ، $\sqrt{18{,}1547}$ ؛ $\sqrt{\frac{18}{7}}$

تمارين :

1. تا تطبيق من ح+ إلى ح+ بحيث :

تا (س) = س^2

1) أحسب صورة كل من الأعداد الحقيقية الآتية بواسطة تا :

6,1 ؛ 7,2 ؛ 0,05 ؛ – 0,75 ؛ 1,0<u>41</u>... ؛ – ...8,5<u>3</u>

2) استخدم جدول المربعات لكي تعين الأعداد الحقيقية التي مربعاتها على الترتيب هي : 0,000225 ؛ 0,0169 ؛ 53,29 ؛ 0,9604 .

2. 1) تحقق من أن 441 هو مربع 21 .

2) استخدم هذه النتيجة لايجاد الأعداد الحقيقية التي مربعاتها على الترتيب هي : 44100 ؛ 4410000 ؛ 4,41 ؛ 0,0441 ؛ 0,000441 .

3. أ = { 7,3 ؛ 4,6 ؛ 8,24 ؛ 2,61 }

ب = { $5^2 \times 10^{-2}$ ؛ 3×10^{-1} ؛ 525×10^{-3} ؛ 6420×10^{-4} }

1) عين أَ مجموعة مربعات عناصر أ .

2) عين بَ مجموعة مربعات عناصر ب .

3) رتب تصاعديا عناصر أ ثم عناصر أَ .

4) رتب تصاعدياً عناصر ب ثم عناصر بَ .

4. نفس السؤال مع المجموعتين ا و ب حيث :

ا = { 14×10^{-2} ؛ 15×10^{-2} ؛ 16×10^{-2} ؛ 17×10^{-2} ؛ 18×10^{-2} ؛ 19×10^{-2} }

ب = { 2×10^{-1} ؛ 4×10^{-1} ؛ 6×10^{-1} ؛ 12×10^{-1} ؛ 18×10^{-1} ؛ 36×10^{-1} }

5. ا = { 2301 ؛ 576 ؛ 5184 8649 ؛ 3249 }

ب = { 10,89 ؛ 47,61 ؛ 7,84 ؛ 0,4096 ؛ 50,41 }

اَ هي مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة الخمسة التي مربعاتها على الترتيب هي عناصر ا الخمسة .

بَ هي مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة الخمسة التي مربعاتها على الترتيب هي عناصر ب الخمسة .

1) استخدم جدول المربعات لتعيين اَ ، بَ .

2) رتب تصاعدياً عناصر ا ثم عناصر اَ

3) رتب تصاعدياً عناصر ب ثم عناصر بَ

6. نفس السؤال مع المجموعتين ا ، ب حيث :

ا = { 2025 ؛ 4356 ؛ 361 ؛ 8281 ؛ 3844 }

ب = { 0,005625 ؛ 0,1681 ؛ 75,69 ؛ 0,0841 ؛ 0,2304 }

7. استخدم جدول المربعات لحساب :

1) $\sqrt{1936}$ ؛ $\sqrt{3721}$ ؛ $\sqrt{4489}$ ؛ $\sqrt{5776}$

2) $\sqrt{0,9801}$ ؛ $\sqrt{0,0256}$ ؛ $\sqrt{0,0625}$ ؛ $\sqrt{15,21}$.

8. 1) ضع على شكل جداء عوامل أولية كلاً من الأعداد الحقيقية :

1960 ، 1960^2 .

2) عين المربعات الكاملة من بين الأعداد الطبيعية الآتية :

74529 ؛ 23104 ؛ 31076 ؛ 705600 ؛ 245025 .

9. 1) اكمل التحليل إلى جداء عوامل أولية لكل من الأعداد الطبيعية الآتية :

$2^3 \times 6^3 \times 15 \times 5^5$ ؛ $6^2 \times 7^3 \times 10^3 \times 21^2$ ؛

$12^5 \times 18^3 \times 21^2 \times 729$ ؛ $8^3 \times 24^2 \times 30^3 \times 50^3$

2) من بين الأعداد السابقة ، ما هي المربعات الكاملة ؟ .

أوجد جذورها التربيعية .

10. 1) ما هو العدد الصحيح ا الذي نضربه بالعدد 5292 لنحصل على مربع كامل ؟
2) تحقق من أن حاصل قسمة 5292 على ا هو مربع كامل .

11. 1) اعط بدون حساب رقم آحاد مربع كل من الأعداد الطبيعية الآتية :
41 ؛ 63 ؛ 76 ؛ 27 ؛ 118 ؛ 219 ؛
2) س مربع كامل . ماذا يمكن أن يكون رقم آحاده ؟
3) ا = { 312 ؛ 1778 ؛ 2916 ؛ 3426 ؛
72514 ؛ 33124 ؛ 47961 } .
أوجد بدون أي حساب عناصر ا التي لا يمكن أن تكون مربعات كاملة .
هل بقية العناصر هي مربعات كاملة ؟

12. أوجد في كل حالة عددا طبيعيا ا بحيث :
1) $ا^2 \leqslant 2259 < (ا + 1)^2$
2) $ا^2 \leqslant 14472 < (ا + 1)^2$
3) $ا^2 \leqslant 883674,7 < (ا + 1)^2$

13. باستعمال جدول المربعات أوجد الجذر التربيعي الصحيح بالنقصان لكلٍ من الأعداد الحقيقية الآتية :
1) 460 ؛ 1012 ؛ 1852 ؛ 3392 7401 ؛
2) 1314 ؛ 8121 ؛ 17056 ؛ 16384 ؛ 25437 .

14. ان الجذر التربيعي الصحيح لعدد طبيعي هو 27 .
ما هو أكبر باقي ممكــن ؟
ما هو العدد الطبيعي الموافق لهذا الباقي والذي جذره التربيعي الصحيح هو 27 ؟

15. ان الجذر التربيعي الصحيح بالنقصان لعدد طبيعي هو ا .
ما هي أكبر قيمة ممكنة لهذا العدد ، وما هي القيمة الصغرى له في كل من الحالات الآتيــة :
ا = 8 ؛ ا = 17 ؛ ا = 57

16. ان حساب الجذر التربيعي الصحيح لعدد طبيعي يعطي 435 كباقي .
ما هي أصغر قيمة ممكنة للجذر التربيعي لهذا العدد ؟ وما هو هذا العدد ؟

17. 1) أوجد الجذر التربيعي الصحيح بالنقصان للعدد 2050 ؟
2) كم عدداً طبيعياً له نفس الجذر الصحيح بالنقصان مع العدد 2050 ؟
ما هو أصغر هذه الأعداد وما هو أكبرها ؟

18. 1) أوجد الجذر التربيعي الصحيح للعدد 5428 .

2) كم نضيف إلى العدد 5428 بحيث أن الجذر التربيعي الصحيح للعدد الطبيعي الناتج هو نفس الجذر التربيعي الصحيح للعدد 5428 ؟

3) كم ننقص من العدد 5428 بحيث أن الجذر التربيعي الصحيح للعدد الطبيعي الناتج يكون هو نفس الجذر التربيعي الصحيح للعدد 5428 ؟

19. نفس السؤال مع كل من الأعداد الطبيعية الآتية :

1350 ؛ 4700 ؛ 34296 .

20. ن عدد طبيعي غير معدوم .

1) برهن أن : $\text{ن}^2 \leqslant \text{ن}(\text{ن}+1) < (\text{ن}+1)^2$ ،

ما هو الجذر التربيعي الصحيح بالنقصان للعدد $\text{ن}(\text{ن}+1)$

2) أوجد عددين طبيعيين متتاليين جداؤهما 18906 .

21. ن عدد طبيعي غير معدوم .

1) برهن أن : $\text{ن}^2 \leqslant \text{ن}(\text{ن}+2) < (\text{ن}+1)^2$

ما هو الجذر التربيعي الصحيح بالنقصان للعدد $\text{ن}(\text{ن}+2)$ ؟

2) أوجد العدد الطبيعي ن بحيث : $\text{ن}(\text{ن}+2) = 5328$

22. ه عدد طبيعي غير معدوم .

1) برهن أن : $(\text{ه}+1)^2 \leqslant \text{ه}(\text{ه}+3) < (\text{ه}+2)^2$

ما هو الجذر التربيعي الصحيح بالنقصان للعدد : $\text{ه} \times (\text{ه}+3)$

2) أوجد العدد الطبيعي ه بحيث : $\text{ه}(\text{ه}+3) = 3780$.

23. أحسب الجذر التربيعي الصحيح بالنقصان لكل من الأعداد الحقيقية الآتية :

1) 99347 ؛ 112896 ؛ 42436 ؛ 74529

2) 792103 ؛ 845715 ؛ 173056 ؛ 4001327 .

3) 68121 ؛ 495616 ؛ 366025 ؛ 5431939 .

4) 1347853 ؛ 645283 ؛ 737540 ؛ 184476

24. أحسب الجذر التربيعي الصحيح بالنقصان لكل من الأعداد الحقيقية الآتية :

1) 954,81 ؛ 1783,41 ؛ 41271,82 ؛ 27881,93

2) $\frac{32}{18}$ ؛ $\frac{75}{12}$ ؛ $\frac{375}{29}$ ؛ $\frac{196}{81}$.

3) $\frac{728}{5}$ ؛ $\frac{1432}{11}$ $\frac{3547}{7}$ $\frac{9897}{4}$ $\frac{7611}{3}$

25. س عدد طبيعي ليس مربعاً كاملاً .

أ هو الجذر التربيعي الصحيح بالنقصان لـ س . 35 هو باقي هذا الجذر .

بإضافة 14 إلى س تحصل على عدد طبيعي هو مربع كامل جذره التربيعي أ + 1 .

ما هو العدد الطبيعي س ؟

26. ع عدد طبيعي ، ليس مربعاً كاملاً .

ب هو الجذر التربيعي الصحيح بالنقصان للعدد ع . 43 هو باقي هذا الجذر .

بطرح 138 من ع تحصل على عدد طبيعي هو مربع كامل جذره التربيعي

ب − 1 . ما هو العدد الطبيعي ع ؟

27. ف هو الفرق بين عددين طبيعيين س ، ع ، : ف = س − ع

فَ هو الفرق بين مربعيهما : فَ = س^2 − ع^2

أحسب س ، ع في كلٍّ من الحالات الآتية :

1) ف = 1 ؛ فَ = 35

2) ف = 2 ؛ فَ = 64

3) ف = 7 ؛ فَ = 161 .

4) ف = 8 ؛ فَ = 256 .

5) ف = 11 ؛ فَ = 407 .

28. أحسب في كل حالة عددين طبيعيين إذا علمت أن جداءهما هو ج وأن حاصل قسمتهما هو ق

1) ج = 12288 ؛ ق = 0,75 .

2) ج = 15210 ؛ ق = 0,4 .

3) ج = 18900 ؛ ق = $\frac{3}{7}$.

4) ج = 978123 ؛ ق = 3

5) ج = 97812,3 ؛ ق = 0,3

29. عبر بالمتر في كل حالة ، عن طول ضلع المربع الذي مساحته :

0,2601 م² ؛ 0,3025 د م² ؛ 35149 سم² ؛ 390625 د م²

3481 آر ؛ 7140,25 م² ؛ 9409 سم² ؛ 54,76 د م²

8649 س آ ر ؛ 4069 م² ؛ 34 هـ آ ر 45 آر . 69 س آر .

30. ما هو ، بالمتر ، طول ضلع مربع علماً بأنه إذا ازداد هذا الطول بمتر واحد ، إزدادت مساحة المربع بـ 57 م² ؟

31. طول رقعة مستطيلة هو ضعف عرضها .

أحسب هذا الطول وهذا العرض علما بأن مساحة هذه الرقعة هي 11552 متراً مربعاً

32. بضرب ضعف عدد حقيقي سالب بثلاثة اضعافه تحصل على 518,94 .

أحسب هذا العدد الحقيقي .

33. باقي الجذر التربيعي الصحيح بالنقصان لعدد طبيعي ا هو 137 .

لهذا العدد الطبيعي أربعة أرقام . أول أرقامه من اليسار هو 4 .

1) برهن أن هذا الجذر أكبر من 68 .

2) ما هو العدد الطبيعي ا ؟

34. س عدد طبيعي فردي بحيث يكون جذره التربيعي الصحيح 27

وبحيث هذا الجذر يقسم س .

عين العدد الطبيعي س .

35. س ، ه ، ر ثلاثة أعداد طبيعية بحيث :

س = ه² + ر ، ر ⩽ 2 ه

1) برهن أنه :

إذا كان : س = ه² + ر و ر ⩽ 2 ه فإن : ه² ⩽ س < (ه + 1)²

2) برهن أنه :

إذا كان : ه² ⩽ س < (ه + 1)² فإن : س = ه² + ر ، ر ⩽ 2 ه

3) ما هو الجذر التربيعي الصحيح بالنقصان للعدد س ؟

36. الفرق بين عددين طبيعيين هو 2 .

1) برهن أن الفرق بين مربعيهما هو مضاعف للعدد 4 .

2) أوجد هذين العددين الطبيعيين إذا علمت أن الفرق بين مربعيهما 136 .

3) a عدد صحيح طبيعي معطى
أوجد هذين العددين الطبيعيين علماً بأن الفرق بين مربعيهما هو $4a$.

37. باستخدام جدول المربعات ، إعط الجذر التربيعي المقرب بالنقصان :

1) إلى $\frac{1}{10}$ للأعداد : 3,82 ؛ 19,69 ؛ 39,5 ؛ 90

2) إلى $\frac{1}{100}$ للأعداد : 0,83 ؛ 0,5 ؛ 0,245 ؛ 0,1162 .

38. أوجد ، من أجل كلٍّ من الأعداد الحقيقية الآتية ، الجذر التربيعي المقرب إلى $\frac{1}{10}$ بالنقصان :

1) 8471 ؛ 75288 ؛ 1325817 ؛ 72814539 .

2) 7258 ؛ 32729 ؛ 2715872 ؛ 23415698 .

3) 0,0742 ؛ $\frac{22}{7}$ ؛ $\frac{9}{10}$.

39. أوجد ، من أجل كل من الأعداد الحقيقية الآتية ، الجذر التربيعي المقرب إلى $\frac{1}{10^2}$ بالنقصان :

1) 815,2 ؛ 15 ؛ 89,7853 ؛ 123,456789 .

2) 738,4 ؛ 18 ؛ 64,8156 ؛ 375,280416 .

3) $\frac{3}{5}$ ؛ $\frac{6}{7}$ ؛ $\frac{4}{11}$ ؛ $\frac{2}{3}$ ؛ 1,75

4) $3+\frac{5}{6}$ ؛ $\frac{22}{7}$ ؛ $\frac{355}{113}$.

40. أوجد ، من أجل كل من الأعداد الحقيقية الآتية ، الجذر التربيعي المقرب إلى $\frac{1}{10^3}$ بالنقصان :

1) 2 ؛ 3 ؛ 5 ؛ 10

2) $\frac{22}{7}$ ؛ $\frac{355}{113}$ ؛ $\frac{9}{10}$ ؛ 1782,4 .

3) 0,3 ؛ 0,03 ؛ 0,003 ؛ 0,0003

4) 3,14 ؛ 3,1416 ؛ 3,141592 .

41. 1) تحقق من أن 0,9 يساوي جذره التربيعي المقرب إلى 0,1 بالنقصان .

2) تحقق من نفس الأمر من أجل : 0,8 .

3) هل يتحقق نفس الشيء من أجل : 0,7 ؟

42. 1) تحقق من أن كلاً من العددين الحقيقيين 0,99 ، 0,98 يساوي جذره التربيعي المقرب إلى 0,01 بالنقصان

2) هل يكون نفس الشيء من أجل العدد الحقيقي 0,97 ؟

43. نصف قطر دائرة (ة) مقاساً بالمتر هو 2,5 .

ما هو نصف قطر الدائرة ، المقرب إلى 1 سم ، التي مساحتها ضعف مساحة الدائرة (ة)

44. مساحة دائرة ، مقاسة بالمتر المربع ، هي 1 .

ما هو نصف قطرها المقرب إلى 1 مم .

45. أحسب ، في كل حالة ، الطول المقرب بالنقصان إلى 1 د م لضلع المربع الذي مساحته :

1) 618 د م^2 63,49 م^2

2) 123,45 م^2 ؛ 132,38 س آ ر .

46. أحسب في كل حالة ، الطول المقرب بالنقصان إلى 1 سم لضلع المربع الذي مساحته :

1) 325 سم^2 ؛ 33,12 د م^2 .

2) 0,4265 م^2 ؛ 173,48 د م^2 .

47. مساحة رقعة مستطيلة ، مقاسة بالمتر المربع ، هي 9548 . عرضها $\frac{4}{7}$ طولها .

أحسب ، بالنقصان إلى 0,1 م ، هذا العرض وهذا الطول .

48. أحسب إلى 0,1 بالنقصان ، كلاً من الأعداد الحقيقية الآتية :

1) $\sqrt{84} + \sqrt{138} - \sqrt{196}$ ؛ $\sqrt{68} + \sqrt{57} - \sqrt{116}$.

2) $\sqrt{171} + \sqrt{216} - \sqrt{75}$ ؛ $\sqrt{105} + \sqrt{87} - \sqrt{126}$.

49. أحسب إلى 0,01 بالنقصان ، كلاً من الأعداد الحقيقية الآتية :

1) $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ ؛ $\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

2) $\sqrt{3 + \sqrt{3}}$ ؛ $\sqrt{3 - \sqrt{3}}$

7	الحسابات على الجذور التربيعية التنـاسب

1 ـ الحساب على الجذور التربيعية

1.1 الجذر التربيعي لجـداء :

a ، b عددان حقيقيان موجبان .

تستنتج أن الجداء ab عدد حقيقي .

ان لكل من الأعداد الحقيقية a ، b ، ab جذر تربيعي .

ضـع : $x = \sqrt{a}$ ؛ $y = \sqrt{b}$ ..

تستنتج أن $x^2 = a$ ؛ $y^2 = b$.

ومنـه : $x^2 y^2 = ab$.

وهذا يعني أن الجذر التربيعي للعدد ab هو xy .

لديـك : $xy = \sqrt{ab}$

لكـن : $x \times y = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

ومنـه : $\boxed{\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}}$

2.1 جداء عدد اصم بعدد ناطق :

a و b عددان حقيقيان موجبان .

لديـك : $\sqrt{a^2 b} = \sqrt{a^2} \times \sqrt{b} = a\sqrt{b}$

تقول إنك **أخرجت** a من رمز الجذر بانتقالك من الكتابة $\sqrt{a^2 b}$ إلى الكتابة $a\sqrt{b}$.

تقول إنك **أدخلت** a تحت رمز الجذر بانتقالك من الكتابة $a\sqrt{b}$ إلى الكتابة $\sqrt{a^2 b}$.

أ). استعمل نتيجة الفقرة 1 ، 1 لكي تحسب بأبسط كيفية ممكنة :
$\sqrt{32} \times \sqrt{8}$ و $\sqrt{27} \times \sqrt{12}$.

ب) احسب القيم المقربة إلى $\frac{1}{100}$ بالنقصان للاعداد $\sqrt{32}$ ، $\sqrt{8}$ ، $\sqrt{27}$ ، $\sqrt{12}$

جـ) أكتب كلاً من الأعداد الصماء التالية على شكل جداء عددين أحدهما ناطق والآخر أصم :
$\sqrt{224}$ ، $\sqrt{150}$ ، $\sqrt{1000}$ ، $\sqrt{4500}$.

د) أ عدد حقيقي موجب ، ن عدد طبيعي . برهن أن : $\sqrt{أ^ن} = (\sqrt{أ})^ن$

3.1 الجذر التربيعي لحاصل قسمة :

أ عدد حقيقي موجب ، ب عدد حقيقي موجب غير معدوم .

تستنتج أن حاصل القسمة $\frac{أ}{ب}$ موجب .

ضع : $\frac{أ}{ب} = حـ$. تستنتج أن : أ = ب حـ .

ومنه : $\sqrt{أ} = \sqrt{ب حـ}$ لكن $\sqrt{ب حـ} = \sqrt{ب} \times \sqrt{حـ}$

ومنه : $\sqrt{أ} = \sqrt{ب} \times \sqrt{حـ}$.

تستنتج أن : $\sqrt{حـ} = \frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}}$ تستنتج أن : $\sqrt{\frac{أ}{ب}} = \frac{\sqrt{أ}}{\sqrt{ب}}$

أ) استعمل نتيجة الفقرة 1 ، 3 لكي تحسب بأبسط كيفية ممكنة :
$\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{12}}$ ؛ $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{15}}$ ؛ $\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{567}}$ ؛ $\frac{\sqrt{847}}{\sqrt{343}}$.

ب) أ و ب عددان حقيقيان حيث : أ $\geqslant 0$ و ب > 0 برهن أن :
$\sqrt{\frac{أ^2}{ب}} = \frac{أ}{\sqrt{ب}}$ ؛ $\sqrt{\frac{4أ^3}{25ب}} = \frac{2أ}{5}\sqrt{\frac{أ}{ب}}$ ؛ $\sqrt{\frac{أ}{9ب^2}} = \frac{\sqrt{أ}}{3ب}$

4.1 الجذر التربيعي لمجموع ولفرق :

• لديك :

$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ و $\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7$

تستنتج أن : $\sqrt{9+16} \neq \sqrt{16} + \sqrt{9}$.

• لديك :

$\sqrt{169-144} = \sqrt{25} = 5$ و $\sqrt{169} - \sqrt{144} = 13 - 12 = 1$

تستنتج أن : $\sqrt{169-144} \neq \sqrt{169} - \sqrt{144}$.

ا و ب عددان حقيقيان بحيث ا ⩾ ب.لديك غالباً :

$\sqrt{ا+ب} \neq \sqrt{ا} + \sqrt{ب}$ و $\sqrt{ا-ب} \neq \sqrt{ا} - \sqrt{ب}$

أ) ا و ب عددان حقيقيان موجبان .

أحسب في كل حالة القيم المقربة إلى $\frac{1}{100}$ بالنقصان لكل عدد من الأعداد الحقيقية $\sqrt{ا}$ ، $\sqrt{ب}$ ، $\sqrt{ا+ب}$ ، $\sqrt{ا-ب}$

ا = 145 و ب = 110 ؛ ا = 428 و ب = 247

قارن في كل حالة : $\sqrt{ا+ب}$ و $\sqrt{ا} + \sqrt{ب}$.

قارن في كل حالة : $\sqrt{ا-ب}$ و $\sqrt{ا} - \sqrt{ب}$.

5.1 مرافق عدد أصم :

• ان العدد الحقيقي $3 + \sqrt{2}$ أصم .

تقول إن العدد الأصم $3 - \sqrt{2}$ **هو العدد الأصم المرافق** أو هو **مرافق العدد** $3 + \sqrt{2}$

$3 + \sqrt{2}$ هو مرافق $3 - \sqrt{2}$

تقول إن العددين $3 + \sqrt{2}$ و $3 - \sqrt{2}$ **مرافقان** لبعضهما البعض .

• ا عدد حقيقي ، ب عدد حقيقي مواجب حيث $\sqrt{ب}$ عدد أصم .

تقول إن : ا $- \sqrt{ب}$ **مرافق** ا $+ \sqrt{ب}$

ا $+ \sqrt{ب}$ مرافق ا $- \sqrt{ب}$

ا $+ \sqrt{ب}$ و ا $- \sqrt{ب}$ مرافقان لبعضهما البعض .

6.1 نسبة ذات مقام أصم :

- $أ$ عدد حقيقي ، $ب$ عدد حقيقي موجب وغير معدوم حيث $\sqrt{ب}$ أصم .

$\frac{أ}{\sqrt{ب}}$ هو حاصل قسمة $أ$ على $\sqrt{ب}$. $\frac{أ}{\sqrt{ب}}$ هو ايضاً نسبة $أ$ إلى $\sqrt{ب}$.

لديك : $\frac{أ}{\sqrt{ب}} = \frac{أ \times \sqrt{ب}}{\sqrt{ب} \times \sqrt{ب}} = \frac{أ\sqrt{ب}}{(\sqrt{ب})^2} = \frac{أ\sqrt{ب}}{ب}$

إنك استبدلت النسبة $\frac{أ}{\sqrt{ب}}$ بالنسبة المساوية $\frac{أ\sqrt{ب}}{ب}$ ،

تقول إنك حولت النسبة الأولى إلى نسبة مقامها ناطق .

يمكنك ان تقول إنك حولت مقام العدد الحقيقي $\frac{أ}{\sqrt{ب}}$ إلى عدد ناطق .

- $أ$ عدد حقيقي . $ب$ و $حـ$ عددان حقيقيان موجبان وغير معدومين ومختلفين

بحيث : $\sqrt{ب}$ و $\sqrt{حـ}$ عددان اصمان

$\sqrt{ب} - \sqrt{حـ}$ مرافق $\sqrt{ب} + \sqrt{حـ}$

لديك : $\frac{أ}{\sqrt{ب} + \sqrt{حـ}} = \frac{أ(\sqrt{ب} - \sqrt{حـ})}{(\sqrt{ب} + \sqrt{حـ})(\sqrt{ب} - \sqrt{ب})}$

لكن: $(\sqrt{ب} + \sqrt{حـ})(\sqrt{ب} - \sqrt{حـ}) =$

$(\sqrt{ب})^2 - \sqrt{حـ} + \sqrt{حـ} . \sqrt{ب} - (\sqrt{حـ})^2$

إنك تحصل أخيراً :

$(\sqrt{ب} + \sqrt{حـ})(\sqrt{ب} - \sqrt{حـ}) = (\sqrt{ب})^2 - (\sqrt{حـ})^2 = ب - حـ$

ومنه $\frac{أ}{\sqrt{ب} + \sqrt{حـ}} = \frac{أ(\sqrt{ب} - \sqrt{حـ})}{ب - حـ}$

إنك استبدلت النسبة $\frac{أ}{\sqrt{ب} + \sqrt{حـ}}$ بالنسبة المساوية $\frac{أ(\sqrt{ب} - \sqrt{حـ})}{ب - حـ}$

تقول إنك قد حولت النسبة الأولى إلى نسبة مقامها عدد ناطق .

بإمكانك ان تقول بأنك حولت مقام العدد الحقيقي $\frac{أ}{\sqrt{ب} + \sqrt{حـ}}$ إلى عدد ناطق .

أ) أوجد مرافق كل عدد من الأعداد الحقيقية التالية :

$4+\sqrt{5}$ ، $10-\sqrt{2}$ ، $\sqrt{6}-3$ ، $\sqrt{11}+7$ ، $\sqrt{8}-\sqrt{5}$

ب) حول كلاً من النسب التالية إلى نسبة مقامها عدد ناطق :

$\dfrac{\sqrt{2}}{5-\sqrt{6}}$ ؛ $\dfrac{18-\sqrt{2}}{18+\sqrt{2}}$ ؛ $\dfrac{\sqrt{7}+5}{4-\sqrt{7}}$ ؛ $\dfrac{7}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$.

7.1 الأعداد الحقيقية التي لها مربع معطى :

مسألة :

أ عدد حقيقي موجب .

هل يوجد عدد أو عدة أعداد حقيقية س حيث $\text{س}^2 = \text{أ}$ ؟

تعلم أنه يوجد عدد حقيقي موجب واحد فقط ب بحيث $\text{ب}^2 = \text{أ}$ وتعلم ان هذا العدد الحقيقي هو الجذر التربيعي للعدد الحقيقي الموجب أ وترمز له بالرمز $\sqrt{\text{أ}}$

لديك : $(\sqrt{\text{أ}})^2 = \text{أ}$.

تلاحظ أن : $(-\sqrt{\text{أ}}) \times (-\sqrt{\text{أ}}) = (-\sqrt{\text{أ}})^2 = \text{أ}$

تستنتج أن : المعاكس $-\sqrt{\text{أ}}$ للعدد الحقيقي الموجب $\sqrt{\text{أ}}$ هو أيضاً حل للمسألة المطروحة .

هل العددان الحقيقيان $\sqrt{\text{أ}}$ و $-\sqrt{\text{أ}}$ هما الحلان الوحيدان للمسألة المطروحة ؟

لنفرض أن العدد الحقيقي حـ حل آخر .

لديك إذن : $\text{حـ}^2 = \text{أ}$ تستنتج أن $\text{حـ}^2 - \text{أ} = 0$

ولكن : $\text{أ} = (\sqrt{\text{أ}})^2$ ومنه $\text{حـ}^2 - (\sqrt{\text{أ}})^2 = 0$.

تحقق من أن: $\text{حـ}^2 - (\sqrt{\text{أ}})^2 = (\text{حـ} - \sqrt{\text{أ}})(\text{حـ} + \sqrt{\text{أ}})$.

يكون لديك عندئذ : $(\text{حـ} - \sqrt{\text{أ}})(\text{حـ} + \sqrt{\text{أ}}) = 0$

تستنتج أنه إما $\text{حـ} = \sqrt{\text{أ}}$ وإما $\text{حـ} = -\sqrt{\text{أ}}$

إنك قد برهنت على أن الحلين الوحيدين للمسألة المطروحة هما العدد الحقيقي الموجب $\sqrt{\text{أ}}$ ومعاكسه $-\sqrt{\text{أ}}$ الذي هو عدد حقيقي سالب .

تلاحظ أنه اذا كان أ معدوماً فلا يوجد الّا حلّ وحيد هو العدد الحقيقي 0 .

تكون قد برهنت النظرية التالية :

نظرية :

إذا كان $ا$ عدداً حقيقياً موجباً غير معدوم فإنه يوجد عددان حقيقيان فقط بحيث مربعهما العدد $ا$ إن أحد هذين العددين هو العدد الحقيقي الموجب $\sqrt{ا}$ والآخر هو العدد الحقيقي السالب $-\sqrt{ا}$.

تلاحظ أن : $\sqrt{ا} \geqslant -\sqrt{ا}$

8.1 الجذر التربيعي لمربع عدد حقيقي :

• $ا$ عدد حقيقي . تعلم أن مربعه $ا^2$ هو عدد حقيقي موجب .
حسب النظرية السابقة تعلم أنه يوجد عددان حقيقيان بحيث مربعهما $ا^2$ وأن أحدهما هو العدد الحقيقي الموجب $\sqrt{ا^2}$.
لكن العددين الحقيقيين اللذين مربعهما $ا^2$ هما $ا$ و $-ا$.
تستنتج أن العدد الحقيقي الموجب $\sqrt{ا^2}$ يساوي العدد الحقيقي $ا$ إذا كان $ا$ موجباً أو معدوماً ويساوي $-ا$ إذا كان $ا$ سالباً .
تعلم أن العدد الحقيقي الموجب $|ا|$ يساوي العدد الحقيقة $ا$ إذا كان $ا$ موجباً أو معدوماً ويساوي العدد الحقيقي $-ا$ إذا كان $ا$ سالباً .

تستنتج أن : $\boxed{\sqrt{ا^2} = |ا|}$

لديك : $\sqrt{3^2} = |3| = 3$ ، $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$

• من أجل عدد حقيقي س معطي لديك :
$\sqrt{س^2} = |س|$ ، $\sqrt{(س-2)^2} = |س-2|$ ،
$\sqrt{(5-2س)^2} = |5-2س|$

إنك تعلم أنه :
إذا كان $س \geqslant 0$ فإن $|س| = س$ ؛ إذا كان $س < 0$ فإن $|س| = -س$
إذا كان $س - 2 \geqslant 0$ فإن $|س-2| = س - 2$ ،

إذا كان س − 2 > 0 فإن | س − 2 | = 2 − س ،
إذا كان 5 − 2 س ⩾ 0 فإن | 5 − 2 س | = 5 − 2 س ،
إذا كان 5 − 2 س < 0 فإن | 5 − 2 س | = 2 س − 5 .
تستنتج أنه :
إذا كان س ⩾ 0 فإن $\sqrt{س^2}$ = س ؛
إذا كان س < 0 فإن $\sqrt{س^2}$ = − س
إذا كان س ⩾ 2 فإن $\sqrt{(س - 2)^2}$ = س − 2 ؛
إذا كان س < 2 فإن $\sqrt{(س - 2)^2}$ = 2 − س
إذا كان $\frac{5}{2}$ ⩾ س فإن $\sqrt{(5 - 2س)^2}$ = 5 − 2 س ؛
إذا كان س > $\frac{5}{2}$ فإن $\sqrt{(5 - 2س)^2}$ = 2 س − 5
تقول إنك عينت في الأمثلة الثلاثة السابقة قيم كل من $\sqrt{س^2}$ ، $\sqrt{(س - 2)^2}$ ، $\sqrt{(5 - 2س)^2}$ حسب قيم العدد الحقيقي س .

أ) أوجد في كل حالة مجموعة الأعداد الحقيقية بحيث :

$س^2 = 16$ ، $س^2 = 144$ ، $س^2 = 8$ ، $س^2 = \frac{9}{4}$ ، $س^2 = \frac{3}{4}$.

ب) عين حسب قيم العدد الحقيقي س قيم كلا من الأعداد الحقيقية التالية :

$\sqrt{(3 - س)^2}$ ؛ $\sqrt{(4 + س)^2}$ ؛ $\sqrt{\left(س - \frac{4}{3}\right)^2}$ ؛

$\sqrt{\left(\frac{3}{2}س - 5\right)^2}$ ؛ $\sqrt{\left(\frac{7}{3} - \frac{س}{2}\right)^2}$.

---

2 ـ التناسب

1.2 تعاريف :

أ ، ب ، ح ، ء أعداد حقيقية غير معدومة حيث : $\frac{أ}{ب} = \frac{ح}{ء}$.

تقول إن الأعداد الحقيقية أ ، ب ، ح ، ء مأخوذة بهذا الترتيب تشكل **تناسباً** أوانها في **تناسب** .

إن ا ، ب ، حـ ، ء هي **حدود** التناسب .
ا و ء هما **الحدان الطرفان** أو **طرفا** التناسب .
ب و حـ هما **الحدان الوسطان** أو **وسطا** التناسب .
ء هو **الرابع المتناسب** للأعداد الحقيقية ا ، ب ، حـ .
إذا كان ب و حـ متساويين فإن ب هو **الوسط المتناسب** للعددين الحقيقيين ا و ء .

2.2 خاصة أساسية :

تشكل الاعداد الحقيقية ا ، ب ، حـ ، ء مأخوذة بهذا الترتيب تناسباً .

لديك $\frac{ا}{ب} = \frac{حـ}{ء}$.

كل من $\frac{ا}{ب}$ و $\frac{حـ}{ء}$ نسبة عددين حقيقين .

إنك برهنت في الفصل 5 فقرة 3.1 أن :

$\frac{ا}{ب} = \frac{حـ}{ء}$ إذا وفقط إذا كان : ا ء = ب حـ .

بإمكانك أن تنص على النظرية التالية :

نظرية :

تشكل أربعة أعداد حقيقية غير معدومة ا ، ب ، حـ ، ء مأخوذة بهذا الترتيب تناسباً إذا وفقط إذا كان جداء الطرفين يساوي جداء الوسطين .

ا) أعط أربعة أعداد حقيقية غير معدومة بحيث تشكل هذه الاعداد تناسباً .
ب) برهن أن الأعداد الحقيقية – 8 ، 10 ، – 24 ، 30 مأخوذة بهذا الترتيب تشكل تناسباً .
حـ) برهن أن الأعداد الحقيقية 30 ، 10 ، – 24 ، – 8 مأخوذة بهذا الترتيب تشكل تناسباً .
ء) برهن أن الأعداد الحقيقية – 8 ، – 24 ، 10 ، 30 مأخوذة بهذا الترتيب تشكل تناسباً .

3.2 تحويل تناسب :

ا ، ب ، حـ ، د أربعة أعداد حقيقية غير معدومة تشكل تناسباً .

- لديك : $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{د}}$ ومنه : $\text{ا د} = \text{ب حـ}$.

ومنه : $\frac{\text{ا د}}{\text{حـ د}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{حـ د}}$ ومنه : $\frac{\text{ا}}{\text{حـ}} = \frac{\text{ب}}{\text{د}}$.

تستنتج أن الأعداد الحقيقية ا ، حـ ، ب ، د مأخوذة بهذا الترتيب تشكل تناسباً آخر .

تقول بأنك قد حصلت على هذا التناسب بإجراء **تبادل بين الوسطين** .

- لديك : $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{د}}$. ومنه : $\text{ا د} = \text{ب حـ}$

ومنه : $\frac{\text{ا د}}{\text{ا ب}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{ا ب}}$ ومنه : $\frac{\text{د}}{\text{ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{ا}}$

تستنتج أن الأعداد الحقيقية د ، ب ، حـ ، ا مأخوذة بهذا الترتيب تشكل تناسباً آخر .

تقول بأنك قد حصلت على هذا التناسب بإجراء **تبادل بين الطرفين** .

- لديك : $\frac{\text{ا}}{\text{ب}} = \frac{\text{حـ}}{\text{د}}$ ومنه : $\text{ا د} = \text{ب حـ}$

ومنه : $\frac{\text{ا د}}{\text{ا حـ}} = \frac{\text{ب حـ}}{\text{ا حـ}}$ ومنه : $\frac{\text{د}}{\text{حـ}} = \frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ ،

تستنتج أن الأعداد الحقيقية د ، حـ ، ب ، ا مأخوذة بهذا الترتيب تشكل تناسباً آخر .

تلاحظ بأنك قد حصلت على هذا التناسب بإجراء تبديل بين الطرفين ثم بين الوسطين .

تكون قد برهنت النظرية التالية :

نظرية :

> إذا شكلت الأعداد الحقيقية غير المعدومة ٲ ، ب ، حـ ، ء مأخوذة بهذا الترتيب تناسباً ، فإن :
> الأعداد الحقيقية ٲ ، حـ ، ب ، ء مأخوذة بهذا الترتيب تشكل تناسباً .
> الأعداد الحقيقية ء ، ب ، حـ ٲ مأخوذة بهذا الترتيب تشكل تناسباً
> الأعداد الحقيقية ء ، حـ ، ب ، ٲ مأخوذة بهذا الترتيب تشكل تناسباً

أ) أعط أربعة أعداد حقيقية غير معدومة تشكل تناسباً .

أعط التناسبات التي تحصل عليها بإجراء التبادل بين الطرفين ثم بين الوسطين وأخيراً بين الطرفين ثم الوسطين مرة واحدة .

ب) أ ، ب ، حـ ، ء أعداد حقيقية غير معدومة حيث : $\frac{ٲ}{ب} = \frac{حـ}{ء}$.

برهن أن :

$\frac{ٲ}{ب} = \frac{حـ}{ء}$ إذا وفقط إذا كان $\frac{ء}{ب} = \frac{حـ}{ٲ}$.

$\frac{ٲ}{ب} = \frac{حـ}{ء}$ إذا وفقط إذا كان $\frac{ٲ}{حـ} = \frac{ب}{ء}$.

$\frac{ٲ}{ب} = \frac{حـ}{ء}$ إذا وفقط إذا كان $\frac{ء}{حـ} = \frac{ب}{ٲ}$.

4.2 الرابع المتناسب لثلاثة أعداد :

مسألـــة :

أ ، ب ، حـ ثلاثة أعداد حقيقية غير معدومة .

هل يوجد عدد حقيقي س بحيث تشكل الأعداد الحقيقية أ ، ب ، حـ ، س تناسباً ؟

عليك بالبحث عن العدد الحقيقي س بحيث : أ س = ب حـ .
تستنتج أن س هو حاصل قسمة العدد الحقيقي ب حـ على العدد الحقيقي أ :

$$س = \frac{ب حـ}{أ} .$$

تعلم بأن هذا العدد وحيد .
تعلم أيضاً بأن العدد الذي تبحث عنه هو الرابع المتناسب للأعداد الحقيقية أ ، ب ، حـ .
يمكنك أن تستخلص ما يلي :

> إذا كان أ ، ب ، حـ ثلاثة أعداد حقيقية غير معدومة فإنه يوجد عدد حقيقي واحد وواحد فقط بحيث يكون هذا العدد الرابع المتناسب للأعداد أ ، ب ، حـ .

5.2 الوسط المتناسب لعددين :

مسألة : أ ، ب عددان حقيقيان غير معدومين .
هل يوجد عدد حقيقي س بحيث تشكل الأعداد أ ، س ، س ، ب تناسباً ؟
عليك بالبحث عن عدد حقيقي س بحيث : $س^2 = أ ب$
تعلم بأن مربع عدد حقيقي هو عدد موجب أو معدوم .
تستنتج أنه إذا كان أ و ب من إشارتين مختلفتين فلا يوجد عدد حقيقي س بحيث تشكل الأعداد أ ، س ، س ، ب تناسباً .
إذا كان أ و ب من نفس الإشارة فإن العدد الحقيقي أ ب موجب .
عليك إذن أن تبحث عن العدد الحقيقي س بحيث مربعه هو أ ب .
تعلم أنه يوجد عددان حقيقيان مربع كل منهما هو أ ب : هما $\sqrt{أ ب}$ و $-\sqrt{أ ب}$
تستنتج بأنه يوجد حلان للمسألة المطروحة هما $\sqrt{أ ب}$ و $-\sqrt{أ ب}$.
تلاحظ بأن الحلين عددان معاكسان .
تعلم بأن كلا من هذين الحلين هو الوسط المتناسب للعددين الحقيقين أ و ب .
يمكنك أن تستخلص ما يلي :

اذا كان أ و ب عددين حقيقين غير معدومين ومن نفس الإشارة ، فإنه يوجد عددان حقيقيان وعددان فقط بحيث كل منهما هو وسط متناسب للعددين أ و ب وهذان العددان هما : $\sqrt{أب}$ و $-\sqrt{أب}$.

أ) أوجد الرابع المتناسب للأعداد : 2 ، -4 ، $\frac{-3}{4}$.

أوجد الرابع المتناسب للأعداد : $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $-\sqrt{28}$ ، $\sqrt{7}$.

ب) أوجد الوسطين المتناسبين للعددين : $2\sqrt{3}$ و $8\sqrt{3}$.

أوجد الوسطين المتناسبين للعددين : $\frac{6}{7}$ و $\frac{14}{3}$.

---

3 ـ الأعداد المتناسبة

1.3 تعاريف :

أ ، أَ ، ب ، بَ أعداد حقيقية غير معدومة بحيث إذا كانت مأخوذة بهذا الترتيب فإنها تشكل تناسباً .

لديك : $\frac{أ}{أَ} = \frac{ب}{بَ}$.

تقول إن العددين أ و أَ **متناسبان** مع العددين ب و بَ .

تقول إن الأعداد الحقيقية غير المعدومة أ ، ب ، حـ ، د ، .... مأخوذة بهذا الترتيب متناسبة مع الأعداد الحقيقية أَ ، بَ ، حَ ، دَ ، ... مأخوذة بهذا الترتيب إذا كان :

$$\frac{أ}{أَ} = \frac{ب}{بَ} = \frac{حـ}{حَ} = \frac{د}{دَ} = \ldots$$

ضع : $ك = \frac{أ}{أَ} = \frac{ب}{بَ} = \frac{حـ}{حَ} = \frac{د}{دَ} = \ldots$

تقول إن ك هو **نسبة التناسبية** .

2.3 خواص الأعداد المتناسبة :

ا ، ب ، ح ، ا' ، ب' ، ح' أعداد حقيقية غير معدومة بحيث ا ، ب ، ح متناسبة مع ا' ، ب' ، ح' . ك هو نسبة التناسبية .
س ، ع ، ص ثلاثة أعداد حقيقية غير معدومة .

- لديك : $\text{ك} = \frac{\text{ا}}{\text{ا}'} = \frac{\text{ا}}{\text{ب}'}$ ومنه $\text{ا} = \text{ك}\,\text{ا}'$ و $\text{ب} = \text{ك}\,\text{ب}'$.

ومنه : $\text{ا} + \text{ب} = \text{ك}\,(\text{ا}' + \text{ب}')$ و $\text{ا} - \text{ب} = \text{ك}\,(\text{ا}' - \text{ب}')$

إذا كان $\text{ا} + \text{ب}$ ، $\text{ا} - \text{ب}$ ، $\text{ا}' + \text{ب}'$ ، $\text{ا}' - \text{ب}'$ غير معدومة فإن :

$$\text{ك} = \frac{\text{ا} + \text{ب}}{\text{ا}' + \text{ب}'} = \frac{\text{ا} - \text{ب}}{\text{ا}' - \text{ب}'}$$

تستنتج أن :

$$\frac{\text{ا}}{\text{ا}'} = \frac{\text{ب}}{\text{ب}'} = \frac{\text{ا} + \text{ب}}{\text{ا}' + \text{ب}'} = \frac{\text{ا} - \text{ب}}{\text{ا}' - \text{ب}'} .$$

- لديك : $\text{ك} = \frac{\text{ا}}{\text{ا}'} = \frac{\text{ب}}{\text{ب}'} = \frac{\text{ح}}{\text{ح}'}$ ومنه : $\text{ا} = \text{ك}\,\text{ا}'$ ، $\text{ب} = \text{ك}\,\text{ب}'$ ، $\text{ح} = \text{ك}\,\text{ح}'$

ومنه : $\text{ا} + \text{ب} + \text{ح} = \text{ك}\,(\text{ا}' + \text{ب}' + \text{ح}')$.

إذا كان $\text{ا} + \text{ب} + \text{ح}$ و $\text{ا}' + \text{ب}' + \text{ح}'$ غير معدومين فإن

$$\text{ك} = \frac{\text{ا} + \text{ب} + \text{ح}}{\text{ا}' + \text{ب}' + \text{ح}'} .$$

تستنتج أن :

$$\frac{\text{ا}}{\text{ا}'} = \frac{\text{ب}}{\text{ب}'} = \frac{\text{ح}}{\text{ح}'} = \frac{\text{ا} + \text{ب} + \text{ح}}{\text{ا}' + \text{ب}' + \text{ح}'}$$

- لديك : $\text{ك} = \frac{\text{ا}}{\text{ا}'} = \frac{\text{ا}}{\text{ب}'} = \frac{\text{ب}}{\text{ب}'} = \frac{\text{ح}}{\text{ح}'}$ ومنه : $\text{ا} = \text{ك}\,\text{ا}'$ ، $\text{ب} = \text{ك}\,\text{ب}'$ ، $\text{ح} = \text{ك}\,\text{ح}'$

ومنه : $\text{ا}\,\text{س} = (\text{ك}\,\text{ا}')\,\text{س}$ ، $\text{ب}\,\text{ع} = (\text{ك}\,\text{ب}')\,\text{ع}$ ، $\text{ح}\,\text{ص} = (\text{ك}\,\text{ح}')\,\text{ص}$

ومنه : $\text{ا}\,\text{س} + \text{ب}\,\text{ع} + \text{ح}\,\text{ص} = \text{ك}\,(\text{ا}'\,\text{س} + \text{ب}'\,\text{ع} + \text{ح}'\,\text{ص})$.

إذا كان $ا س + ب ع + حـ ص$ و $اَ س + بَ ع + حَ ص$ غير معدومين تستنتج أن ك هو نسبة العدد الحقيقي $ا س + ب ع + حـ ص$ إلى العدد الحقيقي $اَ س + بَ ع + حَ ص$

إنك استنتجت أن :

$$\frac{ا}{اَ} = \frac{ب}{بَ} = \frac{حـ}{حَ} = \frac{ا س + ب ع + حـ ص}{اَ س + بَ ع + حَ ص}$$

3.3 حساب عددين حقيقيين يعرف مجموعهما ونسبتهما :

أوجد عددين حقيقيين إذا علمت أن مجموعهما يساوي 3,7 ونسبتهما تساوي 0,85 سم س و ع العددين الحقيقيين اللذين تبحث عنهما .

لديك : $س + ع = 3,7$ و $\frac{س}{ع} = 0,85 = \frac{85}{100}$

لكن : $\frac{85}{100} = \frac{17}{20}$. لديك عندئذ : $\frac{س}{ع} = \frac{17}{20}$.

بتبديل الوسطين تحصل على : $\frac{س}{17} = \frac{ع}{20}$.

تستنتج أن : $\frac{س}{17} = \frac{ع}{20} = \frac{س + ع}{17 + 20}$.

لكن : $س + ع = 3,7$ ومنه : $\frac{س}{17} = \frac{ع}{20} = \frac{3,7}{37} = \frac{1}{10}$

ومنه : $\frac{س}{17} = \frac{1}{10}$ و $\frac{ع}{20} = \frac{1}{10}$.

ومنه : $س = 1,7$ و $ع = 2$.

تحقق من أن العددين الحقيقيين اللذين وجدتهما هما فعلا حلان للمسألة المطروحة .

لديك فعلا : $1,7 + 2 = 3,7$ و $\frac{1,7}{2} = 0,85$.

4.3 حساب عددين حقيقيين يعرف فرقهما ونسبتهما :

أوجد عددين حقيقيين فرقهما يساوي 1,4 و نستهما تساوي $\frac{3}{2}$.

سم س و ع العددين الحقيقيين اللذين تبحث عنهما .

لديك : س − ع = 1,4 و $\frac{س}{ع} = \frac{3}{2}$.

تستنتج أن : $\frac{س}{3} = \frac{ع}{2} = \frac{س - ع}{3 - 2} = س - ع = 1,4$

ومنه : $\frac{س}{3} = 1,4$ و $\frac{ع}{2} = 1,4$ ومنه : س = 4,2 و ع = 2,8

لديك فعلا : 4,2 − 2,8 = 1,4 و $\frac{4,2}{2,8} = \frac{42}{28} = \frac{3 \times 14}{2 \times 14} = \frac{3}{2}$.

4,2 و 2,8 هما إذن الحلان المطلوبان للمسألة المطروحة .

ا) أحسب في كل حالة من الحالتين التاليتين عددين حقيقيين تعلم مجموعهما ج ونسبتهما ك :

ج = 58,5 و ك = − 1,6 ، ج = 17 و ك = $\frac{3}{7}$.

ب) أحسب في كل حالة من الحالتين التاليتين عددين حقيقيين تعلم فرقهما ف ونسبتهما ك :

ف = − 16,8 و ك = 0,3 ؛ ف = − 32 و ك = − $\frac{3}{5}$.

5.3 . أعداد متناسبة عكسياً :

تقول إن الأعداد الحقيقية غير المعدومة ا ، ب ، ح مأخوذة بهذا الترتيب **متناسبة عكسياً** مع الأعداد الحقيقية غير المعدومة اَ ، بَ ، حَ ، مأخوذة بهذا الترتيب إذا كان :

$$\frac{\text{ا}}{\frac{1}{\text{اَ}}} = \frac{\text{ب}}{\frac{1}{\text{بَ}}} = \frac{\text{حـ}}{\frac{1}{\text{حَ}}} .$$

برهن أن : $\frac{\text{ا}}{\frac{1}{\text{اَ}}} = \frac{\text{ب}}{\frac{1}{\text{بَ}}} = \frac{\text{حـ}}{\frac{1}{\text{حَ}}}$ إذا وفقط إذا كان ا اَ = ب بَ = حـ حَ

يمكنك أن تستخلص :

إن الأعداد الحقيقية غير المعدومة ا ، ب ، حـ تكون متناسبة عكسياً مع الأعداد الحقيقية غير المعدومة اَ ، بَ ، حَ إذا وفقط إذا كان : ا اَ = ب بَ = حـ حَ .

ا) أوجد الأعداد الحقيقية ا ، ب ، حـ المتناسبة عكسياً مع الأعداد الحقيقية 5 ، 7 ، 9 .

ب) أوجد الأعداد الحقيقية ا ، ب ، حـ المتناسبة عكسياً مع الأعداد الحقيقية 8 ، 2,5 ، – 6,4 .

حـ) برهن أنه اذا كانت الأعداد الحقيقية ا ، ب ، حـ متناسبة عكسياً مع الأعداد الحقيقية اَ ، بَ ، حَ فإنها تشكل تناسباً مع الأعداد الحقيقية بَ حَ ، حَ اَ ، اَ بَ .

تمارين :

1 . س عدد حقيقي . أكمل الجدول الآتي :

س	....	$\frac{7}{4}$	– 0,05	2,3	$\frac{4}{10}$	....	....	....	....
س^2	0	....		....	....	16	9	$\frac{4}{25}$	0,16

2 . 1) أكتب كلاً من الأعداد الحقيقية الآتية دون استعمال الرمز $\sqrt{}$.

$\sqrt{2^2}$ ؛ $\sqrt{3^6}$ ؛ $\sqrt{5^8}$ ؛ $\sqrt{10^4}$ ؛ $\sqrt{10^{[illegible]}}$

2) أحسب بأبسط كيفية ممكنة كلاً من :

$\sqrt{16 \times 10^{-2}}$ ؛ $\sqrt{0{,}000081}$ ؛ $\sqrt{0{,}09}$ ؛ $\sqrt{0{,}144}$.

$\sqrt{3} \times \sqrt{6} \times \sqrt{2}$ ؛ $\sqrt{4 \times 10^2}$ ؛ $\sqrt{4000}$ ؛

$\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{40}}$ ؛ $\dfrac{\sqrt{5} \times \sqrt{8}}{\sqrt{90}}$

3 . 1) حلل كلاً من الأعداد الصحيحة الآتية إلى جداء عوامل أولية .

12 ؛ 18 ؛ 63 ؛ 75 .

أكتب على أبسط شكل ممكن ، كلاً من الأعداد الحقيقية الآتية :

$\sqrt{12}$ ؛ $\sqrt{18}$ ؛ $\sqrt{63}$ ؛ $\sqrt{75}$

2) نفس السؤالين مع الأعداد الحقيقية :

$\sqrt{98}$ ؛ $\sqrt{48}$ ؛ $\sqrt{162}$

3) نفس السؤالين مع الأعداد الحقيقية :

$\sqrt{27}$ ؛ $\sqrt{60}$ ؛ $\sqrt{180}$

4 . أكتب على أبسط شكل ممكن كلاً من الأعداد الحقيقية الآتية :

1) $\sqrt{20}$ ؛ $\sqrt{32}$ ؛ $\sqrt{144}$ ؛ $\sqrt{392}$ ؛ $\sqrt{768}$

2) $\sqrt{1008}$ ؛ $\sqrt{5292}$ ؛ $\sqrt{3072}$ ؛ $\sqrt{6125}$ ؛ $\sqrt{14112}$.

5 . أ عدد حقيقي بحيث : أ $= \sqrt{720} - \sqrt{45} + \sqrt{80}$.

1) أكتب كلاً من الأعداد الحقيقية $\sqrt{720}$ ؛ $\sqrt{45}$ ؛ $\sqrt{80}$ على أبسط شكل ممكن .

2) أكتب العدد الحقيقي أ على أبسط شكل ممكن

6 . ب عدد حقيقي بحيث : ب $= \sqrt{28} - \dfrac{1}{2}\sqrt{63} - \dfrac{3}{4}\sqrt{7}$

أكتب ب على أبسط شكل ممكن .

7 . أكتب على أبسط شكل ممكن كلاً من الأعداد الحقيقية الآتية :

1) $\sqrt{20} + 2\sqrt{5} - \sqrt{45}$ ؛ $4\sqrt{2} - \sqrt{8} + \sqrt{18}$

2) $5\sqrt{28} + 3\sqrt{175} - \sqrt{252}$ ؛ $\sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{25}{12}}$

3) $3\sqrt{96} - \sqrt{150} + \sqrt{726}$ ؛ $\sqrt{48} - \sqrt{75} - \sqrt{12}$ ؛

$2\sqrt{5} + 3\sqrt{10} - 5\sqrt{\frac{1}{5}}$

8 . أنشر كلاً من الجدآت الآتية ثم اكتب النتيجة على أبسط شكل ممكن .

1) $(\sqrt{27} - \sqrt{3})(\sqrt{27} + \sqrt{3})$ ؛ $(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2$ ؛ $(2\sqrt{3} + 1)(\sqrt{2} - 2)$

2) $(\sqrt{2} + 1)^2$ ؛ $(2\sqrt{3} - \sqrt{7})(\sqrt{3} - \sqrt{12})$ ؛ $(5 - \frac{1}{\sqrt{5}})^2$

3) $(\sqrt{8} - \sqrt{18})(\sqrt{50} + \sqrt{72} - \sqrt{32})$ ؛

$(3\sqrt{20} - \sqrt{80} - 5\sqrt{3})(\sqrt{125} - \sqrt{45} + \sqrt{75})$

4) $(3 - \sqrt{5})^2$ ؛ $(4 + \sqrt{7})^2$ ؛ $(\sqrt{28} + \sqrt{7} - \sqrt{32})(\sqrt{63} - 2\sqrt{8})$

5) $5\sqrt{2}(\sqrt{32} + \sqrt{72} - \sqrt{50})$ ؛ $(\sqrt{5} + \frac{1}{\sqrt{5}})^2$ ؛ $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$

9 . أحسب كلاً من الأعداد الحقيقية الآتية ثم أكتب النتيجة على أبسط شكل ممكن :

1) $\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2$ ؛ $(\sqrt{30})^2$ ؛ $(\sqrt{27} + \sqrt{3})^2$

2) $(\sqrt{2})^2$ ؛ $(\sqrt{35} - \sqrt{7})^2$ ؛ $(\sqrt{28})^2$

3) $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} \times \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$ ؛ $\sqrt{(20 - 2\sqrt{75})(20 + 2\sqrt{75})}$

4) $\sqrt{7 + \sqrt{48}} \times \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ ؛ $\sqrt{\frac{1}{7 + 4\sqrt{3}} \times (7 + 4\sqrt{3})}$

10. 1) تحقق من أن : $5 + 2\sqrt{6} = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{6}$

2) برهن أن كلاً من الأعداد الحقيقية الآتية هو مربع مجموع أو فرق عددين حقيقيين

$7 + 2\sqrt{3}$ ؛ $7 - 2\sqrt{10}$ ؛ $16 + 6\sqrt{7}$ ؛ $69 - 16\sqrt{5}$ ؛ $12 + 2\sqrt{35}$.

11. قارن ، في كل حالة ، العددين الحقيقيين بمقارنة مربعيهما .

1) $6\sqrt{5}$ وَ $8\sqrt{3}$ ؛ $-3\sqrt{7}$ وَ -8 ؛ $3\sqrt{5}$ وَ $2\sqrt{11}$

2) $\sqrt{21} + \sqrt{10}$ وَ $\sqrt{6} + \sqrt{35}$

3) $\sqrt{39} + \sqrt{22}$ وَ $\sqrt{26} + \sqrt{33}$

12. أكتب على ابسط شكل ممكن كلاً من الأعداد الحقيقية الآتية :

$\sqrt{112} \times \sqrt{567}$ ؛ $\sqrt{90} \times \sqrt{735} \times \sqrt{66}$ ؛ $\sqrt{75} \times \sqrt{54} \times \sqrt{112}$

13. تا تطبيق من ح في ح بحيث : تا (س) = س^2 − 3 س + 4 .

أحسب : تا ($\sqrt{3}$) ؛ تا (1 − $\sqrt{3}$) ؛ تا (1 + $\sqrt{3}$)

14. تا تطبيق من ح إلى ح بحيث :

تا (س) = (1 − $\sqrt{5}$) س^2 + 2 (1 + $\sqrt{5}$) س − 8

أحسب : تا ($\sqrt{5}$) ؛ تا (1 + $\sqrt{5}$) ؛ تا (1 − $\sqrt{5}$)

15. ط عدد حقيقي ، تا تطبيق من ح إلى ح بحيث :

تا (س) = (ط − 2) س^2 + ط س − ط − 1

عين العدد الحقيقي ط بحيث : تا (1 + $\sqrt{2}$) = 0

16. تا ، حا تطبيقان من ح في ح بحيث :

تا (س) = (2 س − 1) (3 س − 1) − (4 س^2 − 1)

حا (س) = س^2 − 4 س + 4

1) أحسب تا (3) ؛ تا ($\frac{1}{2}$) ؛ حا ($\sqrt{2}$ − 1)

2) إعط حصراً من المرتبة 2 للعدد حا ($\sqrt{2}$ − 1) ، علماً بأن :

$1,414 < \sqrt{2} < 1,415$

17. تا تطبيق من ح في ح بحيث :

تا (س) = 4 س^2 − 25 + (2 س − 5) (2 − س)

1) أحسب : تا (− 7) ؛ تا ($\frac{1}{2}$) ؛ تا ($\sqrt{3}$ − 1)

2) إعط حصراً لكل من العددين الحقيقيين :

$\sqrt{3}$ − 1 وَ تا ($\sqrt{3}$ − 1) علماً بأن :

$1,73 < \sqrt{3} < 1,74$

18. تا ، حا تطبيقان من ح في ح بحيث :

تا (س) = (2 س − 3)^2 + (4 س^2 − 9) − (2 س − 3) (س + 5)

حا (س) = (3 س − 5) × (5 − 2 س) − (3 س − 5)^2

1) أحسب تا ($\sqrt{2}$) ثم اعط قيمة تا ($\sqrt{2}$) المقربة بالنقصان إلى 10^{-1}

2) ها دالة من ح إلى ح بحيث :

$$ها(س) = \frac{تا(س)}{حا(س)}$$

أ) ما هي مجموعة تعريف الدالة ها ؟

ب) أحسب : ها (0) ؛ ها ($\sqrt{2}$)

حـ) إعط القيمة المقربة إلى 10^{-3} بالنقصان للعدد ها ($\sqrt{2}$)

19. حول كلاً من النسب الآتية إلى نسبة مقامها عدد ناطق :

1) $\frac{7}{\sqrt{5}}$ ؛ $\frac{6}{\sqrt{98}}$ ؛ $\frac{12}{\sqrt{175}}$ ؛ $\sqrt{\frac{2}{3}}$

2) $\frac{4}{3+\sqrt{5}}$ ؛ $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ ؛ $\frac{8}{9+4\sqrt{6}}$

3) $\frac{\sqrt{2}+3}{3\sqrt{2}-3}$ ؛ $\frac{2}{(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2}$ ؛ $\frac{3\sqrt{2}-3\sqrt{5}}{5\sqrt{2}+3\sqrt{5}}$

4) $\frac{\sqrt{12}-\sqrt{27}}{\sqrt{12}+\sqrt{108}}$ ؛ $\frac{2\sqrt{112}+3\sqrt{28}}{\sqrt{5}-3\sqrt{125}}$

20. 1) أحسب الجداء الآتي :

$$[(\sqrt{5}+\sqrt{3})-\sqrt{2}]\ [(\sqrt{5}+\sqrt{3})+\sqrt{2}]$$

2) حول النسبة $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ إلى نسبة مقامها عدد ناطق .

21. أ ، ب ، حـ أعداد حقيقية بحيث :

$$أ = \frac{\sqrt{5}-2}{5+5\sqrt{2}} \quad ؛ \quad ب = \frac{1}{2+\sqrt{5}} \quad ؛ \quad حـ = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

1) حول كل من النسب أ ، ب ، حـ إلى نسبة مقامها عدد ناطق .

2) أحسب العدد الحقيقي س بحيث : س = أ − ب + حـ

3) إعط القيمة المقربة إلى $\frac{1}{100}$ بالنقصان للعدد $\sqrt{5}$ ثم اعط القيمة المقربة إلى $\frac{1}{100}$ بالنقصان للعدد الحقيقي س .

22. س ، ع عددان حقيقيان بحيث :

$$س = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \quad ؛ \quad ع = \frac{1 + \sqrt{6}}{\sqrt{5}} .$$

أحسب : س + ع ؛ س − ع ؛ س . ع ؛ $\frac{س}{ع}$.

23. نفس السؤال مع العددين الحقيقيين س ، ع بحيث :

$$س = \frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} \quad ؛ \quad ع = \sqrt{8 + 2\sqrt{15}} .$$

24. أحسب الأعداد الحقيقية أ ، ب ، حـ بحيث :

$$أ = \frac{1 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} - \frac{1 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$$

$$ب = \frac{2 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} - \frac{2 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}$$

$$حـ = \frac{أ}{ب}$$

25. أحسب العدد الحقيقي ع بحيث :

$$ع = \frac{\dfrac{1 - \sqrt{5}}{2 - \sqrt{5}} - \dfrac{3 - 2\sqrt{5}}{2 + \sqrt{5}}}{\dfrac{3 + \sqrt{5}}{1 - \sqrt{5}} - \dfrac{1 - 2\sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}}}$$

26. عين ، في كل حالة ، مجموعة الأعداد الحقيقية س بحيث :

1) أ) $س^2 = 10^6$ ؛ ب) $س^2 = 9$ ؛ حـ) $س^2 = 4$

2) أ) $س^2 = 13$ ؛ ب) $س^2 - 5 = 0$ ؛ حـ) $\sqrt{س^2} = 5$

3) أ) $2 س^2 - 3 = 0$ ؛ ب) $س^2 - 1 = 0$

4) أ) $7 س^2 - \frac{1}{2} = 0$ ؛ ب) $3 س^2 + 2 = 0$ ؛ حـ) $س^2 + 25 = 0$

27. عين ، في كل حالة ، مجموعة الأعداد الحقيقية س بحيث :

1) أ) $\sqrt{س} = 5$ ؛ ب) $س = (\sqrt{3})^2$

2) أ) $س = \sqrt{(-2)^2}$ ؛ ب) $س = -\sqrt{49}$

28. 1) أحسب : $(5 - 3\sqrt{3})^2$
2) قارن بين 5 وَ $3\sqrt{3}$
3) أكتب $\sqrt{52 - 30\sqrt{3}}$ مستعملاً جذراً واحداً فقط .

29. أحسب : $\sqrt{(س - 1)^2}$ في كل من الحالات الآتية :
1) أ) س = 0 ؛ ب) س = 3
2) أ) س = − 5 ؛ ب) س = 1
3) أ) س ⩾ 1 ؛ ب) س < 1

30. عين في كل حالة ، مجموعة الأعداد الحقيقية س بحيث
1) $\sqrt{(2س - 3)^2} = 2س - 3$
2) $\sqrt{(2س - 3)^2} = 3 - 2س$
3) $\sqrt{(2س - 3)^2} = 0$

31. أحسب : $\sqrt{(س - 2)^2} + \sqrt{(س + 2)^2}$ في كل من الحالات الآتية :
1) أ) س = − 4 ؛ ب) س = − 3 ؛ ح) س = − 2 ؛ د) س = − 1
2) أ) س = 0 ؛ ب) س = 1 ؛ ح) س = 2 ؛ د) س = 4

32. نفس السؤال مع العدد الحقيقي : $\sqrt{(س + 2)^2} - \sqrt{(س - 2)^2}$

33. 1) أكتب حسب قيم العدد س ، التي يجب أن تحددها ، العدد الحقيقي : $\sqrt{(3س + 1)^2}$ بدون الجذر .
2) نفس السؤال مع العدد الحقيقي : $\sqrt{(1 - 2س)^2}$.

34. أكتب حسب قيم العدد س التي يجب ان يحددها ، كلاً من الأعداد الحقيقية الآتية
$\sqrt{(4س - 3)^2}$ ؛ $\sqrt{(1 + س)^2}$ ؛ $\sqrt{(3 + س)^2}$ ؛ $\sqrt{(2 - 5س)^2}$

35. س ، ع عددان حقيقيان موجبان بحيث :
$س = \sqrt{ا} + \sqrt{ب}$ ؛ $ع = \sqrt{ا + ب}$
1) برهن أن : $س^2 - ع^2 = 2\sqrt{اب}$.
2) كيف يمكنك أن تختار ا ، ب لكي يكون س = ع ؟
3) تحقق من أن : $(\sqrt{ا} - \sqrt{ب})^2 = ا + ب - 2\sqrt{اب}$
4) أوجد العلاقة التي يجب أن يحققها ا ، ب لكي يكون : $س^2 = 2ع^2$

36 ا ، ب عددان حقيقيان بحيث اب ليس مربعاً كاملاً .
1) أ) أحسب العدد الحقيقي سـ بحيث : سـ = $(\sqrt{ا} + \sqrt{ب})^2$
ب) برهن ان سـ عدد غير ناطق

2) برهن أنه لا يوجد عدد ناطق حـ بحيث :

$\sqrt{أ} + \sqrt{ب} = \sqrt{حـ}$

37. 1) بين أن الأعداد الحقيقية $\frac{5}{7}$ ، 4 ، 11 ، 6 و 61 على الترتيب تشكل تناسباً .

2) بين أن الأعداد الحقيقية 1,2 ، 1,5 ، 50,4 على هذا الترتيب تشكل تناسباً .

38. 1) هل الأعداد الحقيقية 35 ، $-$ 49 ، $-$ 21 ، 14 على هذا الترتيب تشكل تناسباً

2) هل الأعداد الحقيقية $\frac{2}{3}$ ، $\frac{4}{5}$ ، $\frac{6}{7}$ ، $\frac{36}{35}$ على هذا الترتيب تشكل تناسبا .

3) هل الأعداد الحقيقية 7 ، $-$ 27 ، 21 ، 9 على هذا الترتيب تشكل تناسباً

4) هل الأعداد الحقيقية $-\sqrt{5}$ ، $-\sqrt{3}$ ، $\sqrt{75}$ ، $5\sqrt{5}$ على هذا الترتيب تشكل تناسباً .

39. رتب في كل حالة الأعداد الحقيقية الأربعة المعطاة لكي تحصل على تناسب اعط في كل حالة كل الترتيبات الممكنة :

1) 15 ، 3,25 ، $-$ 117 ، $-$ 7,8

2) $-$ 18,6 ، 52,7 ، $-$ 17 ، 6

3) $\sqrt{5}$ ، $\sqrt{3}$ ، $-9\sqrt{5}$ ، $-$ 15

4) $-$ 3 ، $-$ 4 ، 15,6 ، 20,8

5) 2 ، 7 ، $-$ 3,5 ، $-$ 11,5

6) $\sqrt{8}$ ، $-\sqrt{3}$ ، 12 ، $\sqrt{54}$

40. عين في كل حالة العدد الحقيقي س بحيث :

1) الأعداد الحقيقية 16 ، 8 ، $-$ $-$ 8 ، س على هذا الترتيب تشكل تناسبا .

2) الأعداد الحقيقية س ، $-$ 4 ، $-$ 0,75 ، 2 على هذا الترتيب تشكل تناسباً .

3) الأعداد الحقيقية 2,2 ، 3,3 ، س ، $-$ 4,4 على هذا الترتيب تشكل تناسباً .

4) الأعداد الحقيقية $\frac{2}{5}$ ، $-\frac{4}{7}$ ، $-$ 2 ، س على هذا الترتيب تشكل تناسباً .

5) الأعداد الحقيقية $\sqrt{15}$ ، س ، $-3\sqrt{5}$ ، $-\sqrt{6}$ على هذا الترتيب تشكل تناسباً

6) الأعداد الحقيقية $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\sqrt{7}$ ، س ، $-\sqrt{28}$ على هذا الترتيب تشكل تناسباً .

41. عين في كل حالة العدد الحقيقي س بحيث يكون :

1) أ) $\frac{-3}{5}=\frac{\text{س}}{15}$ ؛ ب) $\frac{-\text{س}}{12}=\frac{9}{16}$ ؛ حـ) $\frac{3}{\text{س}}=\frac{-7}{5}$

2) أ) $\frac{-3,25}{4}=\frac{13}{\text{س}}$ ؛ ب) $\frac{\text{س}}{4,25}=\frac{7,3}{-5}$ ؛ حـ) $\frac{-7,5}{25}=\frac{-4,5}{-3\text{س}}$

42. أوجد في كل حالة الرابع المتناسب للأعداد الحقيقية المعطاة :

1) $1,2$ ، $\frac{5}{4}$ ، $\frac{3}{11}$.

2) -2 ، $\frac{4}{7}$ ، $\frac{1}{3}$

3) $-\frac{5}{4}$ ، $\frac{8}{3}$ ، $\frac{7}{12}$

4) $\sqrt{2}-1$ ، $\sqrt{3}$ ، $2\sqrt{3}$

5) $-\sqrt{5}$ ، $-\sqrt{35}$ ، $\sqrt{2}$

6) $2\sqrt{2}$ ، $3-\sqrt{2}$ ، $3+\sqrt{2}$

7) $\sqrt{3}-1$ ، $\sqrt{2}-1$ ، $\sqrt{2}+1$

43. أوجد في كل حالة الوسط المتناسب للأعداد الحقيقية المعطاة .

1) أ) 11 و 363 ؛ ب) $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{4}$

2) أ) $\frac{5}{12}$ و $\frac{3}{5}$ ؛ ب) 5 و $1,25$

3) أ) $4,5$ و $0,5$ ؛ ب) $12,1$ و $0,1$

4) أ) $\sqrt{3}-1$ و $\sqrt{3}+1$ ؛ ب) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}+\sqrt{2}$

5) أ) $\sqrt{3}+2$ و $2\sqrt{3}-2$ ؛ ب) $5+\sqrt{5}$ و $5-\sqrt{5}$

6) أ) $\sqrt{3}$ و $3\sqrt{3}$ ؛ ب) $4+\sqrt{5}$ و $4-\sqrt{5}$

44. أ ، ب ، حـ ، د أربعة أعداد حقيقية غير معدومة .

1) أ) بين أنه إذا كان : $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}=\frac{\text{حـ}}{\text{د}}$ فإن $\frac{\text{أ}+\text{ب}}{\text{ب}}=\frac{\text{حـ}+\text{د}}{\text{د}}$

ب) بين أنه إذا كان : $\frac{\text{أ}+\text{ب}}{\text{ب}}=\frac{\text{حـ}+\text{د}}{\text{د}}$ فإن $\frac{\text{أ}}{\text{ب}}=\frac{\text{حـ}}{\text{د}}$

2) أ) بين أنه إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{حـ}{د}$ فإن $\frac{أ + حـ}{أ - حـ} = \frac{ب + د}{ب - د}$

ب) بين أنه إذا كان : $\frac{أ + حـ}{أ - حـ} = \frac{ب + د}{ب - د}$ فإن $\frac{أ}{ب} = \frac{د}{د}$

45. أ ، ب ، حـ ، د أربعة أعداد حقيقية غير معدومة

1) بين أن : $\frac{أ}{ب} = \frac{حـ}{د}$ إذا وفقط إذا كان $\frac{2أ - 3ب}{ب} = \frac{2حـ - 3د}{د}$

2) بين أن : $\frac{أ}{ب} = \frac{حـ}{د}$ إذا وفقط إذا كان $\frac{3أ + 2ب}{ب} = \frac{3حـ + 2د}{د}$

3) بين أن : $\frac{أ}{ب} = \frac{حـ}{د}$ إذا وفقط إذا كان $\frac{أ + 4حـ}{أ - 4حـ} = \frac{ب + 4د}{ب - 4د}$

46. أ ، ب ، حـ ، د أربعةأعداد حقيقية غير معدومة

1) بين أن : $\frac{أ}{ب} = \frac{حـ}{د}$ إذا وفقط إذا كان $\frac{أ^2}{ب^2} = \frac{أ حـ}{ب^2}$

2) بين أن : $\frac{أ}{ب} = \frac{حـ}{د}$ إذا وفقط إذا كان $\frac{أ حـ}{ب د} = \frac{حـ^2}{د^2}$

3) بين أنه إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{حـ}{د}$: فإن : $\frac{أ^2}{ب^2} = \frac{حـ^2}{د^2}$

4) إذا كان : $\frac{أ^2}{ب^2} = \frac{حـ^2}{د^2}$ فهل يكون : $\frac{أ}{ب} = \frac{حـ}{د}$ ؟

47. أ ، ب ، حـ ، د أربعة أعداد حقيقية غير معدومة بين أنه :

1) إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{حـ}{د}$ فإن $\frac{أ^2 + ب^2}{ب^2} = \frac{حـ^2 + د^2}{د^2}$

2) اذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{حـ}{د}$ فإن $\frac{أ^2 + حـ^2}{أ^2 - حـ^2} = \frac{ب^2 + د^2}{ب^2 - د^2}$

3) إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{حـ}{د}$ فإن $\frac{أ حـ}{ب د} = \frac{(أ + حـ)^2}{(ب + د)^2}$

48. الأعداد الحقيقية 5 ، − 9 ، 16 ، 42 ، − 81 ، 103 على هذا الترتيب متناسبة مع الأعداد الحقيقية أ ، ب ، 12 ، حـ ، د ، هـ على هـذا التـرتيـب عين الأعـداد الحقيقيـة أ ، ب ، حـ ، د ، هـ

49. ا ، ب ، ح ، اَ ، بَ ، حَ هي أعداد حقيقية بحيث :

$$\frac{\text{ا}}{\text{اَ}} = \frac{\text{ب}}{\text{بَ}} = \frac{\text{ح}}{\text{حَ}} = 0{,}8$$

احسب العددين الحقيقيين : $\frac{\text{ا} + 3\text{ب} + 2\text{ح}}{\text{اَ} + 3\text{بَ} + 2\text{حَ}}$ و $\frac{\text{ا} - 2\text{ب} + 3\text{ح}}{\text{اَ} - 2\text{بَ} + 3\text{حَ}}$

50. احسب الأعداد الحقيقية س ، ع ، ص ، ي بحيث :

$$\frac{3}{5} = \frac{\text{س}}{-12} = \frac{\text{ع}}{15} = \frac{12}{\text{ص}} = \frac{0{,}6}{\text{ي}}$$

51. لاحظ جـــدول الشكـــل 1 .

0,5			−7	1,ن		6	$-\frac{5}{11}$	8,5		
	0,75	9			$\frac{7}{5}$	−4,5			−1	11

(شكل 1)

الأعداد الحقيقية المكتوبة على السطر الأول من اليمين إلى اليسار متناسبة مع الأعداد الحقيقية المكتوبة على السطر الثاني من اليمين إلى اليسار .

أكمل جدول الشكل 1 .

52. احسب في كل حالة ، عددين حقيقيين اذا عملت : مجموعهما م ونسبتهما ك :

1) أ) م = 4,8 و ك = $\frac{1}{3}$ ؛ ب) م = 1,5 و ك = $\frac{3}{8}$

2) أ) م = 55 و ك = $-\frac{9}{4}$ ؛ ب) م = 187,6 و ك = $-\frac{4}{11}$

3) أ) م = $2\sqrt{2}$ وك = $3 - 2\sqrt{2}$ ؛ ب) م = $\sqrt{3} + 1$ و ك = −3

53. احسب في كل حالة عددين حقيقين اذا علمت فرقهما ف ونسبتهما ك .

1) أ) ف = 1,4 و ك = $\frac{3}{2}$ ؛ ب) ف = 12,6 و ك = $-\frac{4}{11}$

2) أ) ف = 2,5 و ك = $\frac{2}{3}$ ؛ ب) ف = $\frac{7}{5}$ و ك = $\frac{4}{11}$

3) أ) ف = $\sqrt{2}$ و ك = $\sqrt{2}$ ؛ ب) ف = − 2 و ك = 3 − 2 $\sqrt{2}$

54. س و ع عددان طبيعيان بحيث :

315 س = 168 ع

1) احسب $\frac{س}{ع}$ ، اعط الكسر غير القابل للاختزال والمكافيء ل : $\frac{س}{ع}$

2) احسب س و ع في كل من الحالات الآتية :

أ) س + ع = 253 ؛ ب) ع − س = 126 ؛ حـ) سَ ع = 1080

55. أ ، ب ، حـ ، د أربعة أعداد حقيقية غير معدومة .

1) بين أنه إذا كان : $\frac{أ}{ب} = \frac{حـ}{د}$ فإن $\frac{أ}{حـ} = \frac{ب}{د} = \frac{6 أ + 5 ب}{6 حـ + 5 د}$

2) س و ع عددان حقيقيان بحيث يكون : $\frac{س}{ع} = \frac{-6}{7}$ و 6 س + 5 ع = 2

استعمل نتيجة السؤال الأول لتعيين س و ع

56. 1) احسب القياسات بالدرجات لزوايا مثلث اذا علمت أن هذه القياسات متناسبة مع الاعداد الطبيعية : 2 ، 3 ، 5 .

2) نفس السؤال مع القياسات المتناسبة مع الاعداد الطبيعية : 4 ، 5 ، 6 .

57. وحدة الاطوال هي السنتيمتر .

احسب أطوال الاضلاع لمثلث اذا علمت أن هذه الاطوال متناسبة مع الاعداد الطبيعية 5 ، 7 ، 4 وعلمت ان محيط المثلث هو 64 .

58. 1) أوجد ثلاثة أعداد حقيقية متناسبة مع 3 ، 5 ، 7 ، إذا علمت أن مجموعهما هو 255 .

2) أوجد ثلاثة اعداد متناسبة مع − 2,4 ؛ 1,6 ؛ 0,8 ، إذا علمت ان مجموعهما هو − 4,4

3) أوجد ثلاثة أعداد حقيقية متناسبة مع $\frac{2}{3}$ ، $\frac{4}{5}$ ، $\frac{11}{11}$ إذا علمت أن مجموعهما : 1660 .

.59 وزع في كل حالة المبلغ المالي م على ثلاثة حصص متناسبة مع الاعداد الحقيقية ا ، ب ، حـ إذا علمت أن :

1) م = 4780 د ج ا = 4 ؛ ب = 7 ؛ حـ = 9

2) م = 148 د ج ؛ ا = $\frac{7}{10}$ ؛ ب = $\frac{5}{6}$ ؛ حـ = $\frac{14}{15}$

.60 وزع مبلغ مالي م على ثلاثة أشخاص فكانت الحصص متناسبة مع الاعداد : 7 ، 6 ، 5 .

إذا وزع هذا المبلغ م على حصص متناسبة مع الأعداد 6 ، 5 ، 4 تزيد عندئذ حصة أحد الأشخاص الثلاثة 120 د ج على حصته في التوزيع الأول .

ما هو المبلغ الموزع ؟

.61 لاحظ جدول الشكـل 2 .

8	2,5		− 6,4	9				$\frac{9}{11}$	− 3,5	
0,6		2			$-\frac{3}{4}$	− 0,7	$\frac{3}{5}$			11

(شكل 2)

ان الأعداد الحقيقية المكتوبة على السطر الأول من اليمين إلى اليسار هي متناسبة عكسياً مع الأعداد الحقيقية المكتوبة على السطر الثاني من اليمين إلى اليسار .

أكمل هذا الجدول .

.62 أوجد في كل حالة الأعداد الطبيعية الأصغر ما يمكن ، والتي هي متناسبة عكسياً مع :

1) 5 ، 7 ، 9 ؛ 2) 10 ، 15 ، 20

.63 وزع المبلغ 98 د ج على ثلاثة حصص متناسبة عكسياً مع 5 ، 8 ، 12 .

64. س ، ع ، ص ثلاثة أعداد حقيقية متناسبة مع الأعداد 18 ؛ − 5 ؛ 3

1) بين أن : $س = -3ع + ص$.

2) احسب س ، ع ، ص إذا علمت أن : $ع + ص = 4$

65 1) أوجد ثلاثة أعداد حقيقية س ، ع ، ص متناسبة مع الأعداد الحقيقية 5 ، 9 ، 16

إذا علمت أن : $ص - ع = 4,9$.

2) أوجد ثلاثة أعداد حقيقية ا ، ب ، حـ متناسبة مع الأعداد الحقيقية 5 ، 7 ، 9

إذا علمت أن : $س - ص = 420$.

66. س ، ع ، ا ، ب ، حـ ، د أعداد حقيقية غير معدومة .

1) بين أنه إذا كان : $\frac{ا}{ب} = \frac{حـ}{د}$ فإن $\frac{4ا + 3حـ}{4ب + 3د} = \frac{7ا + 11حـ}{7ب + 11د}$

2) بين أنه إذا كان : $\frac{4ا + 3حـ}{4ب + 3د} = \frac{7ا + 11حـ}{7ب + 11د}$ فإن $\frac{ا}{ب} = \frac{حـ}{د}$

3) بين أنه إذا كان : $\frac{ا}{ب} = \frac{حـ}{د}$ فإن $\frac{4ا + 3حـ}{4ب + 3د} = \frac{س ا + ع حـ}{س ب + ع د}$

4) باي شرط يمكنك ان تثبت انه :

إذا كان $\frac{4ا + 3حـ}{4ب + 3د} = \frac{س ا + ع حـ}{س ب + ع د}$ فإن $\frac{ا}{ب} = \frac{حـ}{د}$

67. احسب في كل حالة عددين حقيقيين موجبين س و ع بحيث يكون :

1) $\frac{س}{ع} = \frac{5}{4}$ و $س^2 - ع^2 = 324$

2) $\frac{س}{ع} = \frac{4}{3}$ و $س^2 + ع^2 = 250$

68. احسب ثلاثة أعداد حقيقية س ، ع ، ص بحيث :

- مجموعهمـا 292 .
- س و ع متناسبين مع 105 و 90
- ع و ص متناسبين مع 24 و 21

69. س عدد حقيقي بحيث يكون $0 \leqslant$ س $\leqslant 8$

1) م مبلغ من المال موزع على ثلاثة أشخاص بالتناسب مع الأعداد الحقيقية 8 − س للشخص الأول ، 8 للشخص الثاني ، 8 + س للشخص الثالث .
احسب حصة كل واحد .

2) م هو نفس المبلغ موزع في هذه المرة على نفس الأشخاص بالتناسب مع ، 8 للشخص الأول ، 8 + س للثاني و 8 + 2 س للثالث .
احسب حصة كل شخص بعد التوزيع الثاني .

3) عين س حتى تكون حصة الشخص الأول في التوزيع الأول تساوي $\frac{3}{4}$ حصته في التوزيع الثاني .

70. س ، ع ، ص ثلاثة قياسات بالدرجات لزوايا مثلث متقايس الساقين.ط عدد حقيقي

1) احسب س ، ع ، ص إذا علمت أن ع و ص متناسبتان مع : 2 و 5 .

2) احسب س ، ع ، ص بدلالة ط إذا علمت أن ع و ص متناسبان مع : ط و 5

3) احسب س ، ع ، ص ، ط ، بحيث :
س = ص ؛ ع و ص متناسبتان مع ط و 5 ؛ ص − ع = 30° .

8

أشـعة المسـتوي
الجمـع الشـعاعي

1 ـ أشـعة المسـتوى

1.1 . الثنائيات النقطية من المستوي :

علم نقطتين أ و ب (شكل 1)

« شـكل 1 »

إنالثنائية المرتبة (أ ، ب) هي **ثنائية نقطية** من المستوي .

أ **مبدأ** الثنائية النقطية (أ ، ب) ؛ ب **نهاية** الثنائية النقطية (أ ، ب) .

تقول إن الثنائية النقطية (أ ، أ) **ثنائية نقطية معدومة** .

تمثل الثنائية النقطية (أ ، ب) بسهم منطلق من أ متجه نحو ب (شكل 2)

« شـكل 2 »

2.1 . الاتجاه على مستقيم :

• ارسم مستقيما (ق)

علم على (ق) نقطتين مختلفتين أ و ب (شكل 3)

« شـكل 3 »

تعلم أن الثنائية النقطية (أ ، ب)

تسمح بتعيين اتجاه أول على المستقيم (ق) :

وهو الاتجاه من أ نحو ب الذي تقول من أجله أن « أ قبل ب » أو « ب بعد أ »

وتعلم أيضاً أن الثنائية النقطية (ب ، أ) تسمح بتعيين اتجاه ثان على المستقيم (ق)

وهو الاتجاه من ب نحو أ الذي تقول من أجله أن (ب قبل أ) أو « أ بعد ب »

وتعلم أيضاً ان هذين الاتجاهين متعاكسان وانهما الاتجاهان الوحيدان اللذان يمكن تعيينهما على المستقيم (ق)

سم (س ع) المستقيم (ق)

شاهد الشكل 4 : إن السهم يعني

انك اخترت على المستقيم (س ع)

الاتجاه من أ نحو ب

« شـكل 4 »

• تعلم أيضا ان اختيار اتجاه على المستقيم (ف) يسمح لك بتعريف علاقة ترتيب في (ف) وهي العلاقة : « ... تسبق أو تطابق ... »

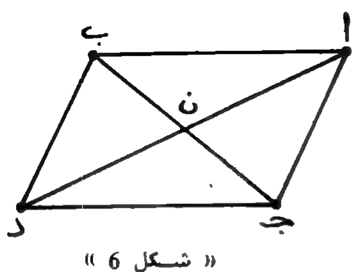
أ) ارسم مستقيما (ف) . اختر اتجاها على (ف)
علم على (ف) بكل الكيفيات الممكنة أربع نقط أ ، ب ، ج ، د .
ب) ارسم مستقيما (ف) . اختر اتجاها على (ف)
علم على (ف) بكل الكيفيات الممكنة أربع نقط أ ، ب ، ج ، د
بحيث يكون لقطعتي المستقيم [أ د] و [ب ج] نفس المنتصف .
ج) بدراسة كل الأشكال المحصل عليها في التمرين ب) السابق بين أنه :
إذا كان للقطعتين [أ د] و [ب ج] نفس المنتصف فإن أ ب = ج د

3.1 . الثنائية النقطية المسايرة لثنائية نقطية أخرى :

د ج ن ب أ

« شكل 5 »

• أرسم مستقيما (Δ)
اختر اتجاها على (Δ)
علم عليه أربع نقط أ ، ب ، ج ، د حيث يكون للقطعتين المستقيمتين [أ د] و [ب ج] نفس المنتصف ن (شكل 5) أرسم كل الأشكال الممكنة.
تقول إن الثنائية النقطية (أ ، ب) **مسايرة** للثنائية النقطية (ج ، د).
• يمكنك أن تقول إن للقطعتين المستقيمتين [أ د] و [ن ن] نفس المنتصف تستنتج أنه :
إذا كان ن منتصف القطعة [أ د] فإن الثنائية النقطية (أ ، ن)
مسايرة للثنائية النقطية (ن ، د) .
عندما تحل التمرين ج) من الفقرة 2.1 تكون قد بينت أنه :
إذ كان للقطعتين [أ د] و [ب ج] نفس المنتصف فإن أ ب = ج د
تلاحظ أنه :
إذا كانت النقط أ ، ب ، ج ، د على استقامة واحدة وإذا كانت الثنائية (أ ، ب) مسايرة للثنائية (ج ، د) فإن أ ب = ج د .



« شكل 6 »

• عين الآن أربع نقط ا ، ب ، ج ، د من المستوي بحيث لا تكون أية ثلاثة منها على استقامة واحدة وبحيث يكون للقطعتين [ا د] و [ب ج] نفس المنتصف ن (شكل 6) تقول أيضا إن الثنائية النقطية (ا ، ب) **مسايرة** للثنائية النقطية (ج ، د)

تعريف :

تكون الثنائية النقطية (ا ، ب) **مسايرة** للثنائية النقطية (ح ، د) اذا كان للنقطتين [ا د] و [ب ج] نفس المنتصف .

ترمز لهذا بما يلي : (ا ، ب) ~ (ج ، د) . وتقرأ : (ا ، ب) تساير (ج ، د)
تلاحظ في حالة الشكل (6) أن القطعتين [ا د] و [ب ج] هما قطرا الرباعي ا ب د ج
لهذين القطرين نفس المنتصف . تستنتج ان الرباعي ا ب د ح متوازي أضلاع .
تعلم أنه اذا كان الرباعي ا ب د ج متوازي أضلاع فإن للقطرين [ا د] و [ب ج] نفس المنتصف .
في حالة ما إذا كانت ا ، ب ، ج ، د أربع نقط بحيث لا تكون أية ثلاث منها على استقامة واحدة تلاحظ أن :

(ا ، ب) تساير (ج ، د) يعني ان الرباعي ا ب د ج متوازي أضلاع

• نتفق على أن ثنائية نقطية معدومة تساير أي ثنائية نقطية معدومة أخرى .

ا) بين أنه :

إذا كانت الثنائية النقطية (ا ، ب) تساير الثنائية النقطية (ج ، د)
فان الثنائية النقطية (ا ، ج) تساير الثنائية النقطية (ب ، د) .

ب) بين أنه :

إذا كانت (ا ، ب) ~ (ج ، د) فإن (د ، ب) ~ (ج ، ا)

4.1 . العلاقة « ... يساير ... » في مجموعة الثنائيات النقطية من المستوي :

تعلم أن الثنائية النقطية (أ ، ب) تساير الثنائية النقطية (ج ، د) إذا كان للقطعتين [أ د] و [ب ج] نفس المنتصف .

إنك تعرف هكذا علاقة في المجموعة ج للثنائيات النقطية من المستوى و هي العلاقة « ... يساير ... » .

• من أجل كل ثنائية (أ ، ب) تكون القطعتان [أ ب] و [ب أ] متساويتين . لهما اذا نفس المنتصف .

تستنتج أنه : من أجل كل ثنائية نقطية (أ ، ب) : (أ ، ب)~ (أ ، ب)

تستنتج أن : كل ثنائية نقطية تساير نفسها .

اذن العلاقة « ... يساير ... » في ج انعكاسية .

• اذا كانت الثنائية النقطية (أ ، ب) تساير الثنائية النقطية (ج ، د) هذا يعني أن للقطعتين [أ ب] و [ج د] نفس المنتصف ويعني أن للقطعتين [ج د] و [أ ب] نفس المنتصف أيضا .

تستنتج أنه اذا كان : (أ ، ب) ~ (ج ، د) فإن (ج ، د) ~ (أ ، ب)

يمكنك أن تستخلص أنه :

كلما كانت ثنائية نقطية (أ ، ب) مسايرة لثنائية نقطية (ج ، د)

تكون (ج ، د) مسايرة ل : (أ ، ب)

تقول ان الثنائيتين النقطيتين (أ ، ب) و (ج ، د) **متسايرتان**

إذن العلاقة « ... يساير ... » في ج تناظرية .

• لنبين أنه :

اذا كانت (أ ، ب) ~ (ج ، د) و (ج ، د) ~ (هـ ، و) فإن

(أ ، ب) ~ (هـ ، و)

لديك خمس حالات :

الحالة الأولى :

المستقيمات (ا ب) ، (ج ء) و (هـ و) متمايزة مثنى مثنى (شكل 7)

تعرف في هذه الحالة أن :

(ا ، ب) ~ (ج ، ء) يعني أن الرباعي ا ب ء ج متوازي أضلاع .

(ج ، ء) ~ (هـ ، و) يعني أن الرباعي ج ء و هـ متوازي أضلاع .

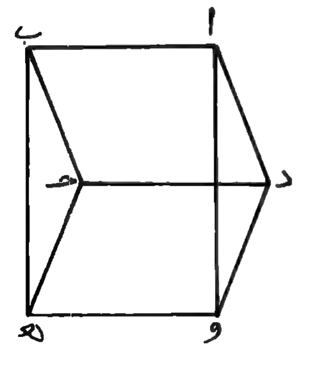
تستنتج أن :

(ا ب) // (ج ء) و ج ء = هـ و

تستنتج أن : (ا ب) // (هـ و) و ا ب = هـ و

إن الرباعي ا ب و هـ متوازي أضلاع .

تستنتج أن (ا ، ب) ~ (هـ ، و)



« شكل 7 »

الحالة الثانية :

المستقيمان (ا ب) و (ج ء) متطابقان والمستقيمان (ا ب) و (هـ و) متمايزان (شكل 8)

لديك (ا ، ب) ~ (ج ، ء) .

تستنتج أن :

للقطعتين [ا ء] و [ب ج] نفس المنتصف ن

وتستنتج أن : ا ب = ج ء

لديك : (ا ب) // (ج ء) و ا ب = ج ء

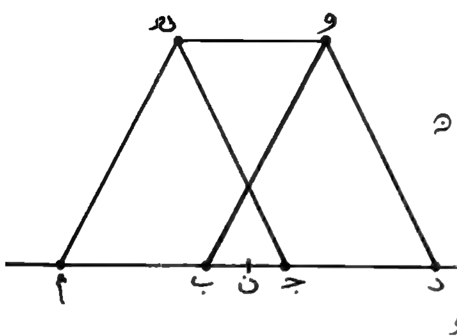
إن الرباعي ج ء و هـ متوازي أضلاع .

تستنتج أن (ا ب) // (هـ و) و ج ء = هـ و

وتستنتج أن (ا ب) // (هـ و) و ا ب = هـ و

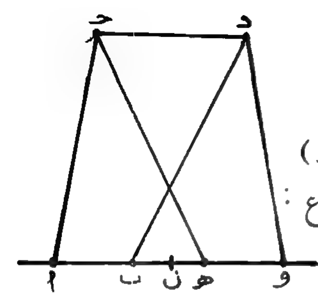
إن الرباعي ا ب و هـ متوازي أضلاع .

تستنتج أن : (ا ، ب) ~ (هـ ، و)



« شكل 8 »

الحالة الثالثة :



« شكل 9 »

المستقيمان (ا ب) و (ج ى) متمايزان

والمستقيمان (ا ب) و (هـ و) متطابقان (شكل 9)

لديك : (ا ، ب) ~ (ج ، ى) و (ج ، ى) ~ (هـ ، و)

تستنتج أن الرباعيين ا ب ى ج و ج ى و هـ متوازيان أضلاع

تستنتج خاصة أن ا ب = ج ى و ج ى = هـ و

وتستنتج أن : ا ب = هـ و

سمّ ن منتصف القطعة [ا و]

بما أن ا ب تساوي هـ و ، لا يمكن للنقطة ن أن تنتمي الى [ا ب] ولا إلى [هـ و] .

فإن ن تنتمي اذا إلى [ب هـ]

لديك : ا ن = ا ب + ب ن ، ن و = ن هـ + هـ و ، ا ب = هـ و

ومنه : ب ن = ن هـ

تستنتج أن : ن منتصف القطعة [ب هـ]

تستنتج أن : (ا ، ب) ~ (هـ ، و).

الحالة الرابعة :

المستقيمات (ا ب) و (ج ى) متمايزتان والمستقيمات (ج ى) و (هـ و) متطابقان (شكل 10)

لديك (ا ، ب) ~ (ج ، ى)

تستنتج أن الرباعي ا ب ى ج متوازي أضلاع

« شكل 10 »

تستنتج أن : (ا ب) // (ج ى) و ا ب = ج ى

لديك : (ج ، ى) ~ (هـ ، و)

تستنتج إن للقطعتين [ج و] و [ى هـ] نفس المنتصف

تستنتج أن : ج ى = هـ و

تستنتج أن : (ا ب) // (هـ و) و ا ب = هـ و

تستنتج أن الرباعي ا ب و هـ متوازي أضلاع

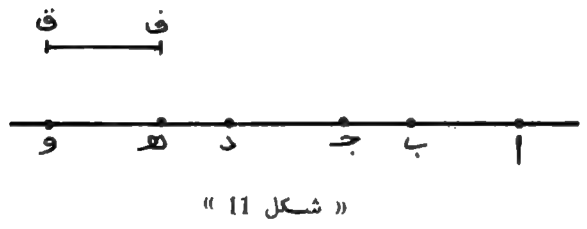
تستنتج أن : (ا ، ب) ~ (هـ ، و)

الحالة الخامسة :

المستقيمات(أ ب) ، (جـ د) ، (هـ و) متطابقة (شكل 11)

علم ثنائية نقطية (ف ، ق) بحيث : ف ∉ (أ ب) ، ق ∉ (أ ب)

و (ف ، ق) ~ (جـ ، د) (شكل 11)



« شكل 11 »

لديك : (أ ، ب) ~ (جـ ، د) و (جـ ، د) ~ (ف ، ق) .

إن النتيجة المحصل عليها في الحالة الثانية تمكنك من الاستنتاج أن :

(أ ، ب) ~ (ف ، ق)

لديك : (ف ، ق) ~ (جـ ، د) و (جـ ، د) ~ (ف ، ق)

تستنتج حسب نفس النتيجة ، أن : (هـ ، و) ~ (ف ، ق)

لديك اذا : (أ ، ب) ~ (ف ، ق) و (ف ، ق) ~ (هـ ، و)

إن النتيجة المحصل عليها في الحالة الثالثة تمكنك من الاستنتاج أن :

(أ ، ب) ~ (هـ ، و) .

بينت في كل الحالات أنه إذا كان :

(أ ، ب) ~ (جـ ، د) و (جـ ، د) ~ (هـ ، و) فإن (أ ، ب) ~ (هـ ، و) .

يمكنك أن تستخلص أنه :

كلما كانت ثنائية نقطية (أ ، ب) مسايرة لثنائية نقطية (جـ ، د) وكانت (جـ ، د) مسايرة لثنائية نقطية (هـ ، و) تكون (أ ، ب) مسايرة لـ (هـ ، و)

إذن العلاقة « ... يساير ... » في ج **متعدية**

إن هذه العلاقة انعكاسية وتناظرية ومتعدية في آن واحد فهي إذا علاقة تكافؤ في مجموعة الثنائيات النقطية من المستوى .

تقول : إن هذه العلاقة هي **علاقة التساير** .

أ) علم ثنائيتين نقطيتين (أ ، ب) و (ج ، د) بحيث :
(أ ، ب) ~ (ج ، د) .
علم ثنائيتين نقطيتين (هـ ، و) و (ف ، ق) بحيث :
(هـ ، و) ~ (أ ، ب) و (ف ، ق) ~ (أ ب)
هل يمكنك تعيين كل الثنائيات النقطية المسايرة للثنائية النقطية (أ ، ب) ؟
ب) علم ثنائية نقطية (أ ، ب) ثم علم ثنائية نقطية (ج ، د) بحيث لا تكون (ج ، د) مسايرة للثنائية النقطية (أ ، ب) . عين ثنائية نقطية (هـ ، و) تساير (أ ، ب). هل (هـ ، و) تساير (ج ، د) ؟

5.1 . أشعة المستوى :

- لقد عرفت أن العلاقة « ... يساير ... » في المجموعة ج للثنائيات النقطية من المستوي هي علاقة تكافؤ .

إذا كانت (أ ، ب) ثنائية نقطية من المستوي فإنك تعرف أن :

مجموعة الثنائيات النقطية من المستوي التي تساير (أ ، ب) هي صنف تكافؤ الثنائية النقطية (أ ، ب) .

يشمل هذا الصنف عدداً لا نهائيا من الثنائيات النقطية : (أ ، ب) ، ($أ_1$ ، $ب_1$) ($أ_2$ ، $ب_2$) ، ($أ_3$ ، $ب_3$) ....

تقول إن هذا صنف التكافؤ هو **شعاع** من المستوى

تعين صنف تكافؤ الثنائية النقطية (أ ، ب) بالرمز $\overleftarrow{أب}$ وتقرأ : شعاع $\overleftarrow{أب}$

تعرف أن : كلا من الثنائيات النقطية (أ ، ب) ، ($أ_1$ ، $ب_1$) ، ($أ_2$ ، $ب_2$)...
تعين نفس صنف التكافؤ .

يمكنك أن تكتب : $\overleftarrow{أب} = \overleftarrow{أ_1ب_1} = \overleftarrow{أ_2ب_2} = \overleftarrow{أ_3ب_3}$ ...

يمكنك أن تعين الشعاع بحرف واحد يعلوه سهم .

سم $\overleftarrow{ش}$ الشعاع السابق .

كل ثنائية نقطية (أ ، ب) ، ($أ_1$ ، $ب_1$) ، ($أ_2$ ، $ب_2$) ، ($أ_3$ ، $ب_3$) ...
ممثل للشعاع $\overleftarrow{ش}$.

يمكنك أن تكتب : $\overleftarrow{ش} = \overleftarrow{أب} = \overleftarrow{أ_1 ب_1} = \overleftarrow{أ_2 ب_2} = \ldots$

إن مجموعة أصناف التكافؤ من أجل علاقة التساير في مجموعة الثنائيات النقطة من المستوى هي **مجموعة أشعة المستوى** .

ارمز لهذه المجموعة بالحرف : شَ

• إن الشعاع الممثل بالثنائية النقطية المعدومة (أ ، أ)

هو **الشعاع المعدوم**.يعين بالرمز $\overleftarrow{0}$.

يمكنك أن تكتب : $\overleftarrow{أأ} = \overleftarrow{0}$

• لا يمكنك أن ترسم شعاعا لأنه يجب أن ترسم كل الثنائيات النقطية التي تمثل نفس الصنف وعددها غير منته .

تكتفي برسم ثنائية نقطية تمثل هذا الشعاع يمكنك أن تمثل الشعاع $\overleftarrow{ش}$ كما هو مبين في الشكل 12.

(أ ، ب) ممثل للشعاع $\overleftarrow{ش}$ (شكل 12)

($أ_1$ ، $ب_1$) ممثل آخر للشعاع $\overleftarrow{ش}$ (شكل 12)

يكون اختيار المبدأ لممثل الشعاع $\overleftarrow{ش}$ كيفيا

« شكل 12 »

تقول ان منحنى المستقيم (أ ، ب) هو منحنى الشعاع $\overleftarrow{أب}$

تعرف أن الثنائية النقطية (أ ، ب) تحدد اتجاهين اثنين فقط على مستقيم :

اتجاه أ نحو ب واتجاه ب نحو أ (شكل 13)

تقول ان :

الاتجاه من أ نحو ب هو **اتجاه** الشعاع $\overleftarrow{أب}$

وتقول ان طول القطعة [أ ب] هو **معيار الشعاع** $\overleftarrow{أب}$.

« شكل 13 »

تكتب $\| \overleftarrow{أب} \| = أب$. وتقرأ معيار الشعاع أب يساوي طول القطعة [أ ب] أو البعد بين أ و ب .

إذا كانت الثنائية (أ ، ب) ممثلا للشعاع $\overleftarrow{ش}$ تكتب $\| \overleftarrow{ش} \| = أب$.

تقرأ : معيار الشعاع ش يساوي طول القطعة [أ ب] .

تلاحظ أن : $\| \overleftarrow{0} \| = 0$.

أ) $\overleftarrow{\text{أب}}$ و $\overleftarrow{\text{حء}}$ شعاعان متساويان

بين أن الشعاعين $\overleftarrow{\text{أح}}$ و $\overleftarrow{\text{بء}}$ متساويان وأن الشعاعين $\overleftarrow{\text{ءب}}$ و $\overleftarrow{\text{حأ}}$ متساويان

ب) $\overleftarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ'ب'}}$ ، $\overleftarrow{\text{بح}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب'ح'}}$ هي أشعة حيث $\overleftarrow{\text{اب}} = \overleftarrow{\text{أ'ب'}}$ ، $\overleftarrow{\text{بح}} = \overleftarrow{\text{ب'ح'}}$

بين أن : $\overleftarrow{\text{اا'}} = \overleftarrow{\text{حح'}}$ ، وأن : $\overleftarrow{\text{٢ح}} = \overleftarrow{\text{٢'ح'}}$

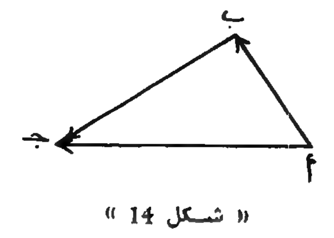
2 ـ الجمع في ش

1.2 ـ مجموع شعاعين :

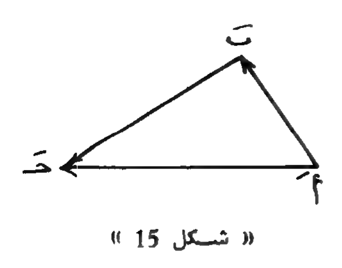
• (أ ، ب) و (ب ، ح) هما ثنائيتان نقطيتان حيث نهاية الأولى هي بداية الثانية (الشكل 14)

تقول ان :

الثنائية النقطية (أ ، ح) **مجموع** الثنائيتين (أ ، ب) و (ب ، ح)



« شكل 14 »



« شكل 15 »

أرسم ثنائية نقطية (أَ ، بَ) تساير (أَ ، بَ)

يمكنك أن تختار من بين الثنائيات النقطية التي تساير (ب ، ح) الثنائية النقطية التي مبدأها بَ . سم حَ نهايتها (شكل 15) .

إن الثنائية النقطية (أَ ، حَ) مجموع الثنائيتين النقطيتين (أَ ، بَ) و (بَ ، حَ) (شكل 15) .

ـ بين أن الثنائيتين النقطيتين (أ ، ح) و (أَ ، حَ) متسايرتان

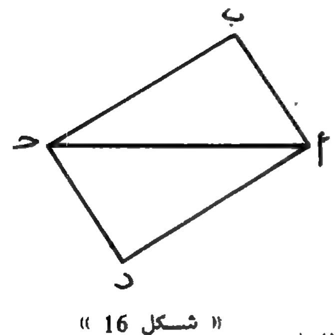
لديك : (أ ، ب) ~ (أَ ، بَ) و (ب ، ح) ~ (بَ ، حَ)

تستنتج أن : (ا ، اَ) من (ب ، بَ) و (ب ، بَ) ~ (حـ ، حـَ) ومنه :
(ا ، اَ) ~ (حـ ، حـَ) ومنه : (ا ، حـ) ~ (اَ ، حـَ) .
تستنتج أن :
الثنائيتين النقطيتين (ا ، حـ) و (اَ ، حـَ) متسايرتان ، انهما تعرفان إذاً نفس الشعاع .
تعريف :

$\overleftarrow{و}$ شعاع ممثل بالثنائية النقطية (ا ، ب) $\overleftarrow{ش}$ شعاع ممثل بالثنائية النقطية (ب ، حـ) **مجموع** الشعاعين $\overleftarrow{و}$ و $\overleftarrow{ش}$ هو الشعاع $\overleftarrow{ي}$ الممثل بالثنائية النقطية (ا ، حـ)

تكتب $\overleftarrow{ي} = \overleftarrow{و} + \overleftarrow{ش}$ وتقرأ : الشعاع $\overleftarrow{ي}$ يساوي الشعاع $\overleftarrow{و}$ زائد الشعاع $\overleftarrow{ش}$
الشعاعان $\overleftarrow{و}$ و $\overleftarrow{ش}$ هما **حداً** المجموع
تلاحظ أن : $\overleftarrow{و} = \overleftarrow{اب}$ ، $\overleftarrow{ش} = \overleftarrow{بحـ}$ ، $\overleftarrow{ي} = \overleftarrow{احـ}$
تستنتج أن : $\overleftarrow{احـ} = \overleftarrow{اب} + \overleftarrow{بحـ}$

• سم د الرأس الرابع لمتوازي الأضلاع ا ب حـ د (شكل 16)



« شكل 16 »

لديك : $\overleftarrow{اد} = \overleftarrow{بحـ} = \overleftarrow{ش}$
ان الثنائيات النقطية (ا ، ب) ،
(ا ، د) ، (ا ، حـ) تمثل الأشعة
$\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ش}$ ، $\overleftarrow{و} + \overleftarrow{ش}$ على الترتيب
تلاحظ أنه لكي ترسم ممثلا للشعاع المجموع
يمكنك أن ترسم الثنائية النقطية (ا ، حـ) التي طرفاها
طرفا القطر [ا حـ] لمتوازي الأضلاع ا ب حـ د .

أ) $\overrightarrow{و}$ و $\overrightarrow{ش}$ شعاعان

ارسم ممثلا لكل شعاع ثم ممثلا للشعاع $\overrightarrow{و} + \overrightarrow{ش}$

ب) بين أن مجموع شعاعين من نفس المنحنى هو شعاع من نفس المنحنى

2.2 ـ الجمع في المجموعة ش :

يمكنك أن ترفق بكل ثنائية ($\overrightarrow{و}$ ، $\overrightarrow{ش}$) من الجداء الديكارتي ش × ش الشعاع $\overrightarrow{و} + \overrightarrow{ش}$ الذي هو مجموع الشعاعين $\overrightarrow{و}$ و $\overrightarrow{ش}$.

تكون قد عرفت هكذا تطبيقا من ش × ش في ش

تعريف :

يسمى التطبيق من ش × ش في ش ، الذي يرفق بكل ثنائية ($\overrightarrow{و}$ ، $\overrightarrow{ش}$) من ش × ش الشعاع $\overrightarrow{و} + \overrightarrow{ش}$ **الجمع في ش** أو **الجمع الشعاعي** .

إن الجمع الشعاعي **عملية داخلية في ش**

3.2 . علاقة شال :

أ ، ب ، ج ثلاثة نقط كيفية من المستوي

$\overrightarrow{أب}$ ، $\overrightarrow{بج}$ ، $\overrightarrow{أج}$ هي الأشعة التي ممثلوها (أ ، ب) ، (ب ، ج) ، (أ ، ج) على الترتيب .

تعرف أن : $\overrightarrow{أج} = \overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بج}$

تستنتج أن :

من أجل كل نقط أ ، ب ، ج : $\overrightarrow{أج} = \overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بج}$

تسمى المساواة $\overrightarrow{أج} = \overrightarrow{أب} + \overrightarrow{بج}$ **علاقة شال** للجمع الشعاعي

أ) هـ ، ك ، ل ثلاثة نقط من المستوى

أوجد النقطة م بحيث : $\overleftarrow{هـ م} = \overleftarrow{هـ ك} + \overleftarrow{هـ ل}$

ب) أ ، ب ، جـ ثلاثة نقط كيفية

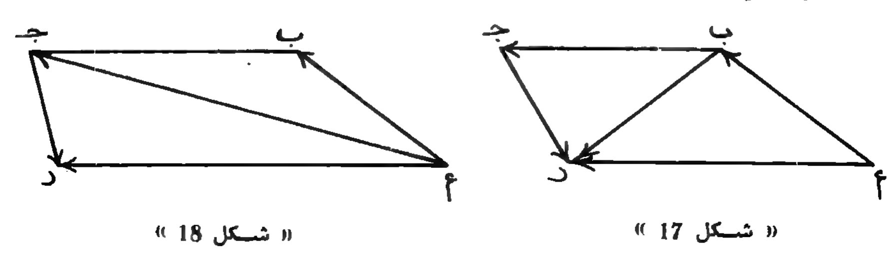
بين أن :

$\overleftarrow{أ ب} = \overleftarrow{أ جـ} + \overleftarrow{جـ ب}$ ، $\overleftarrow{ب جـ} = \overleftarrow{ب أ} + \overleftarrow{أ جـ}$ ، $\overleftarrow{جـ أ} = \overleftarrow{جـ ب} + \overleftarrow{ب أ}$

3 ـ خواص الجمع في ش

1.3 . التجميـــع :

$\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ش}$ ، $\overleftarrow{ي}$ ثلاثة أشعة ، أ نقطة من المستوى



« شـكل 18 » « شـكل 17 »

سم ب ، جـ ، د النقطة الثلاثة من المستوى بحيث :

$\overleftarrow{أ ب} = \overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ب جـ} = \overleftarrow{ش}$ ، $\overleftarrow{جـ د} = \overleftarrow{ي}$ ، (شكل 17 ، 18)

يمكنك أن تكتب $(\overleftarrow{و} + \overleftarrow{ش}) + \overleftarrow{ي} = (\overleftarrow{أ ب} + \overleftarrow{ب جـ}) + \overleftarrow{جـ د}$

وحسب علاقة شال لديك : $\overleftarrow{أ ب} + \overleftarrow{ب جـ} = \overleftarrow{أ جـ}$.

ومنه $(\overleftarrow{أ ب} + \overleftarrow{ب جـ}) + \overleftarrow{جـ د} = \overleftarrow{أ جـ} + \overleftarrow{جـ د}$

ودائماً حسب علاقة شال لديك : $\overleftarrow{أ جـ} + \overleftarrow{جـ د} = \overleftarrow{أ د}$

تستنتج أن : $(\overleftarrow{و} + \overleftarrow{ش}) + \overleftarrow{ي} = \overleftarrow{أ د}$

يمكنك أن تكتب : $\overleftarrow{و} + (\overleftarrow{ش} + \overleftarrow{ي}) = \overleftarrow{أ ب} + (\overleftarrow{ب جـ} + \overleftarrow{جـ د})$

لكن : $\overleftarrow{ب جـ} + \overleftarrow{جـ د} = \overleftarrow{ب د}$ ومنه : $\overleftarrow{أ ب} + (\overleftarrow{ب جـ} + \overleftarrow{جـ د}) = \overleftarrow{أ ب} + \overleftarrow{ب د}$.

تستنتج أن : $(\overleftarrow{و} + \overleftarrow{ش}) + \overleftarrow{ي} = \overleftarrow{و} + (\overleftarrow{ش} + \overleftarrow{ي})$

وتستخلص أنه :

من أجل كل أشعة $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ش}$ ، $\overleftarrow{ى}$: $(\overleftarrow{و} + \overleftarrow{ش}) + \overleftarrow{ى} = \overleftarrow{و} + (\overleftarrow{ش} + \overleftarrow{ى})$

إذن الجمع في ش **تجميعي**

يمكنك أن تحذف الأقواس فتكتب :

$(\overleftarrow{و} + \overleftarrow{ش}) + \overleftarrow{ى} = \overleftarrow{و} + (\overleftarrow{ش} + \overleftarrow{ى}) = \overleftarrow{و} + \overleftarrow{ش} + \overleftarrow{ى}$

2.3 . التبديـل :

$\overleftarrow{و}$ و $\overleftarrow{ش}$ شعاعان ، ا نقطة من المستوي

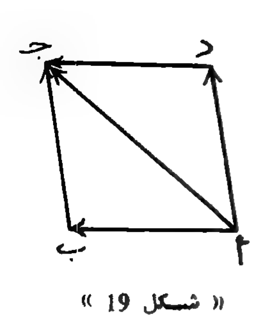
سم ب و جـ النقطتين من المستوي بحيث :

$\overleftarrow{اب} = \overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ب جـ} = \overleftarrow{ش}$. (شكل 19)

يمكنك أن تكتب :

$\overleftarrow{و} + \overleftarrow{ش} = \overleftarrow{اب} + \overleftarrow{ب جـ} = \overleftarrow{اجـ}$

سم د النقطة بحيث : $\overleftarrow{اد} = \overleftarrow{ش}$ (شكل 19)



« شكل 19 »

تستنتج أن : (ا ، د) ~ (ب ، جـ)

ومنه (ا ، ب) ~ (د ، جـ)

وتستنتج أن : (د ، جـ) ممثل آخر للشعاع $\overleftarrow{و}$

ومنه $\overleftarrow{د جـ} = \overleftarrow{و}$

يمكنك أن تكتب :

$\overleftarrow{ش} + \overleftarrow{و} = \overleftarrow{اد} + \overleftarrow{د جـ} = \overleftarrow{اجـ}$

تستنتج أن : $\overleftarrow{و} + \overleftarrow{ش} = \overleftarrow{ش} + \overleftarrow{و}$

ويمكن أن تستخلص أنه :

من أجل كل شعاعين $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ش}$ ، $\overleftarrow{و} + \overleftarrow{ش} = \overleftarrow{ش} + \overleftarrow{و}$

إذن الجمع في ش **تبديلي**

3.3 . العنصر الحيادي :

$\overleftarrow{و}$ شعاع ، ا نقطة من المستوى

سم ب النقطة من المستوى بحيث $\overleftarrow{اب} = \overleftarrow{و}$

يمكنك أن تكتب حسب علاقة شال :

$\overleftarrow{اب} + \overleftarrow{بب} = \overleftarrow{اب}$ و $\overleftarrow{اا} + \overleftarrow{اب} = \overleftarrow{اب}$

إن الثنائيتين النقطيتين (ا ، ا) ، (ب ، ب) ممثلان للشعاع المعدوم $\overleftarrow{0}$

تستنتج أن : $\overleftarrow{و} + \overleftarrow{0} = \overleftarrow{0} + \overleftarrow{و} = \overleftarrow{و}$

وتستخلص أنه :

من أجل كل شعاع $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{و} + \overleftarrow{0} = \overleftarrow{0} + \overleftarrow{و} = \overleftarrow{و}$

إذن الشعاع المعدوم $\overleftarrow{0}$ هو **العنصر الحيادي** للجمع في شه

يقبل الجمع في شه **عنصرا حياديا** : هو الشعاع المعدوم $\overleftarrow{0}$

4.3 . معاكس شعاع :

$\overleftarrow{و}$ شعاع ، ا نقطة من المستوى (شكل 20)

سم ب النقطة من المستوى بحيث : $\overleftarrow{اب} = \overleftarrow{و}$

حسب علاقة شال يمكنك أن تكتب :

$\overleftarrow{اب} + \overleftarrow{با} = \overleftarrow{اا} = \overleftarrow{0}$ و $\overleftarrow{با} + \overleftarrow{اب} = \overleftarrow{بب} = \overleftarrow{0}$

سم $\overleftarrow{و'}$ الشعاع الذي ممثله (ب ، ا)

لديك : $\overleftarrow{اب} = \overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{با} = \overleftarrow{و'}$

تستنتج أن $\overleftarrow{و} + \overleftarrow{و'} = \overleftarrow{و'} + \overleftarrow{و} = \overleftarrow{0}$

وتستخلص أنه :

$\overleftarrow{و}$

ب ا

« شكل 20 »

من أجل كل شعاع $\overleftarrow{و}$ يوجد شعاع $\overleftarrow{و'}$ بحيث : $\overleftarrow{و} + \overleftarrow{و'} = \overleftarrow{و'} + \overleftarrow{و} = \overleftarrow{0}$

إن الشعاع $\overleftarrow{و'}$ هو **معاكس** $\overleftarrow{و}$ أو **نظير** الشعاع $\overleftarrow{و}$ بالنسبة للجمع في شه

تلاحظ أن $\overleftarrow{و}$ هو معاكس الشعاع $\overleftarrow{و'}$ بالنسبة للجمع في شه

وتقول إن $\overleftarrow{و}$ و $\overleftarrow{و'}$ متعاكسان بالنسبة للجمع في شه

ترمز لمعاكس الشعاع $\overleftarrow{و}$ بالرمز $-\overleftarrow{و}$

تذكر أنه اذا كان ممثل الشعاع $\overleftarrow{و}$ هو الثنائية النقطية (أ ، ب)

فإن ممثل معاكسه $-\overleftarrow{و}$ هو الثنائية النقطية (ب ، أ)

تلاحظ أن معاكس الشعاع المعدوم هو الشعاع المعدوم .

يمكنك أن تستخلص أنه :

لكل شعاع نظير بالنسبة للجمع في شم

5.3 . الـزمـرة (شم ، +)

انك عرفت أن الجمع في شم قانون تركيب داخلي أو عملية داخلية في شم

كما عرفت أيضا أن :

- الجمع في شم تجميعي .
- الجمع في شم يقبل عنصرا حياديا .
- لكل عنصر من شم نظير بالنسبة للجمع في شم

تقول إن المجموعة شم المزودة بالجمع الشعاعي **زمـرة**

ترمز لها هكذا : (شم ، +) وتقرأ : « الزمرة شم زائد »

وقد عرفت من جهة أخرى أن :

الجمع في ش تبديلي .

تقول ان الزمرة (شم ، +) **زمرة تبديلية** .

أ) بين أنه يوجد ستة كيفيات لكتابة مجموع ثلاثة أشعة $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ش}$ ، $\overleftarrow{ي}$

ب) $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ش}$ شعاعان بحيث $\overleftarrow{و} = \overleftarrow{ش}$ ؛ $\overleftarrow{ى}$ شعاع كيفي

بين أن : $\overleftarrow{و} + \overleftarrow{ى} = \overleftarrow{ش} + \overleftarrow{ى}$

ج) $\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ش}$ ، $\overleftarrow{ى}$ ثلاثة أشعة بحيث :

$\overleftarrow{و} + \overleftarrow{ى} = \overleftarrow{ش} + \overleftarrow{ى}$

بين أن : $\overleftarrow{و} = \overleftarrow{ش}$

تمــاريـــن

1 . $\overrightarrow{اب}$ شعاع غير معدوم من المستوى . علم ثنائية نقطية (ج ، د) مسايرة للثنائية (ا ، ب) . (يمكنك استخدام المسطرة والمنقلة) .

عوض فيما يلي النقط بأحد الرموز التالية : ∋ ؛ ∌ ؛ = ؛ ≠ ؛ ~ :

$\overline{اب}$ ... $\overline{جد}$ ؛ (ا ، ا) ... (ا ، ب) ؛ (ا ، ب) ... $\overrightarrow{اب}$ ؛ (ا ، ا) ... $\overline{0}$

(ج ، د)... (ا ، ب) ؛ ج ج...$\overrightarrow{0}$ ؛ (ا ، ب)...$\overrightarrow{جد}$ ؛ (ا ، ا)... (ب ، ب)

$\overrightarrow{اب}$... ا ب ؛ (ج ، د) ... (ج د) .

2 . $\overrightarrow{اب}$ شعاع غير معدوم من المستوى . علم الثنائية النقطية (ه ، ك) في كلٍّ من الحالات الآتية :

1) (ه ، ك) ~ (ا ، ب) و ه = ب .

2) $\overrightarrow{هك} = \overrightarrow{اب}$ و ك = ا .

3) $\overrightarrow{هك} = \overrightarrow{اب}$ و ك ∋ [ا ب] .

4) $\overrightarrow{هك} = \overrightarrow{اب}$ و ك ∌ (ا ب)

3 . ا ، ب ، ح رؤوس مثلث متقايس الأضلاع . اَ نقطة كيفية .

1) علم النقطتين جَ ، بَ بحيث : $\overrightarrow{ااَ} = \overrightarrow{ببَ}$ ؛ $\overrightarrow{ااَ} = \overrightarrow{ججَ}$

2) أوجد في الشكل كل الثنائيات النقطية المتسايرة مثنى مثنى

4 . ا ، ب ، ج رؤوس مثلث .

1) علم النقطتين بَ ، اَ بحيث تكون (ا ، بَ) مسايرة لـ (ب ، ج) و (ح ، اَ) مسايرة لـ (ا ، بَ) .

2) برهن أن ج هي منتصف [ب اَ] .

3) علم النقطة د بحيث يكون ح منتصف [ا د] . ثم أوجد جميع الثنائيات النقطية المتسايرة في الشكل

5 . (ا ، ب) ، (ج ، د) ؛ (د ، هـ) ثنائيات نقطية بحيث :

ا ب = ج د ، ج د = د هـ . م منتصف القطعة [ب د]

برهن أن م هي أيضا منتصف [ا هـ] .

6 . وحدة الأطوال هي السنتمتر ، $\overrightarrow{اب}$ شعاع بحيث $\|\overrightarrow{اب}\| = 3$.

1) ارسم دائرة (ق) مركزها ا وتشمل ب .

2) برهن أنه إذا كان هـ ∋ (ق) فإن : $\|\overrightarrow{اب}\| = \|\overrightarrow{اهـ}\|$

3) علم ثلاث نقاط $هـ_1$ ؛ $هـ_2$ ؛ $هـ_3$ بحيث :

$\|\overrightarrow{اهـ_1}\| = \|\overrightarrow{اهـ_2}\| = \|\overrightarrow{اهـ_3}\| = \|\overrightarrow{اب}\|$

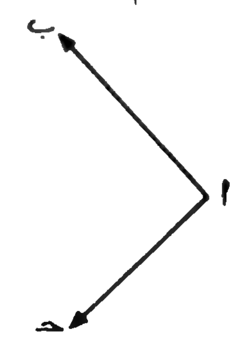
هل هذه النقط نقط من (ق)

4) هل ما يلي صحيح ؟

« إذا كان معيار الشعاع $\overleftarrow{\text{هـ و}}$ مساوياً معيار الشعاع $\overleftarrow{\text{م ن}}$ ، فإن $\overleftarrow{\text{هـ و}}$ يساوي $\overleftarrow{\text{م ن}}$ »

7 . شاهد كلا من الأشكال 21 ، 22 ، 23

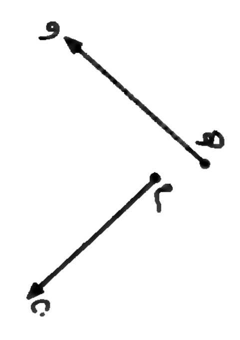
ارسم في كل حالة ممثلاً للشعاع $\overleftarrow{\text{ق}} + \overleftarrow{\text{ك}}$:



« شكل 21 »

$\overleftarrow{\text{ا ب}} = \overleftarrow{\text{ق}}$

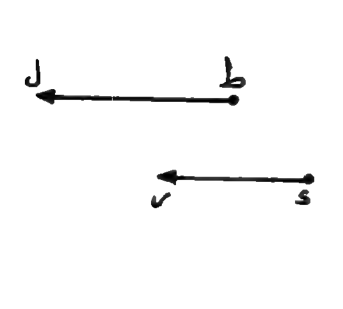
و $\overleftarrow{\text{ا جـ}} = \overleftarrow{\text{ك}}$



« شكل 22 »

$\overleftarrow{\text{هـ و}} = \overleftarrow{\text{ق}}$

و $\overleftarrow{\text{م ن}} = \overleftarrow{\text{ك}}$



« شكل 23 »

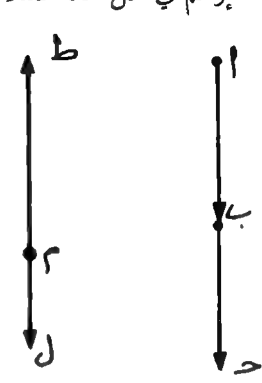
$\overleftarrow{\text{ط ل}} = \overleftarrow{\text{ق}}$

$\overleftarrow{\text{د ر}} = \overleftarrow{\text{ك}}$

و (ط ل) // (د ر)

8 . شاهد كلا من الأشكال 24 ، 25 ، 26 ، 27 .

إرسم في كل حالة ممثلا للشعاع $\overleftarrow{\text{ق}} + \overleftarrow{\text{ك}}$



« شكل 24 »

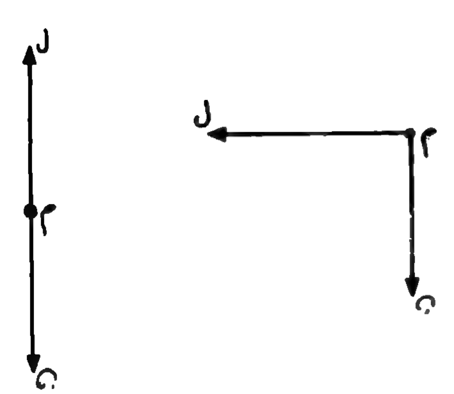
$\overleftarrow{\text{ا ب}} = \overleftarrow{\text{ق}}$

و $\overleftarrow{\text{ب جـ}} = \overleftarrow{\text{ك}}$

« شكل 25 »

$\overleftarrow{\text{م ط}} = \overleftarrow{\text{ق}}$

و $\overleftarrow{\text{م ل}} = \overleftarrow{\text{ك}}$



« شكل 26 »

$\overleftarrow{\text{م ل}} = \overleftarrow{\text{ق}}$

و $\overleftarrow{\text{م ن}} = \overleftarrow{\text{ك}}$

و (م ل) ⊥ (م ن)

« شكل 27 »

$\overleftarrow{\text{م ل}} = \overleftarrow{\text{ق}}$

و $\overleftarrow{\text{م ن}} = \overleftarrow{\text{ك}}$

و $\|\overleftarrow{\text{م ل}}\| = \|\overleftarrow{\text{م ن}}\|$

9 . ا ب ج مثلث .

ارسم ممثلا لكلّ من الأشعة الآتية :

$\overrightarrow{\text{اب}} + \overrightarrow{\text{بج}}$ ؛ $\overrightarrow{\text{اب}} + \overrightarrow{\text{جب}}$ ؛ $\overrightarrow{\text{با}} + \overrightarrow{\text{اج}}$ ؛ $\overrightarrow{\text{با}} + \overrightarrow{\text{جب}}$ ؛ $\overrightarrow{\text{با}} + \overrightarrow{\text{بج}}$.

10 . ا ب ج مثلث ، م منتصف [ب ج] إرسم ممثلاً لكلّ من الأشعة الآتية :

$\overrightarrow{\text{اب}} + \overrightarrow{\text{مج}}$ ؛ $\overrightarrow{\text{بم}} + \overrightarrow{\text{جا}}$ ؛ $\overrightarrow{\text{بم}} + \overrightarrow{\text{اج}}$ ؛ $\overrightarrow{\text{ما}} + \overrightarrow{\text{مب}}$ ؛ $\overrightarrow{\text{مج}} + \overrightarrow{\text{اب}}$ ؛ $\overrightarrow{\text{مب}} + \overrightarrow{\text{مج}}$

11 . وحدة الأطوال هي السنتمتر . ا ، ب ، ج ثلاث نقاط بحيث يكون في :

- **الحالة الأولى** : ا ، ب ، ج على استقامة واحدة ، ب بين ا و ج ،
  $\|\overrightarrow{\text{اب}}\| = 3$ ، $\|\overrightarrow{\text{اج}}\| = 5$
- **الحالة الثانية** : ا ، ب ، ج على استقامة واحدة ، ا هي منتصف [ب ج] ،
  $\|\overrightarrow{\text{بج}}\| = 6$
- **الحالة الثالثة** : ا ، ب ، ج على استقامة واحدة ، ا بين ب و ج
  $\|\overrightarrow{\text{اب}}\| = 5$ ، $\|\overrightarrow{\text{اج}}\| = 2$
- **الحالة الرابعة** : ا ، ب ، ج ليست على استقامة واحدة .

1) ارسم في كل حالة ممثلا للشعاع $\overrightarrow{\text{اب}} + \overrightarrow{\text{اج}}$.

2) في أي حالات يكون لديك : $\|\overrightarrow{\text{اب}} + \overrightarrow{\text{اج}}\| = \|\overrightarrow{\text{اب}}\| + \|\overrightarrow{\text{اج}}\|$ ؟

3) في أي حالات يكون لديك : $\|\overrightarrow{\text{اب}} + \overrightarrow{\text{اج}}\| < \|\overrightarrow{\text{اب}}\| + \|\overrightarrow{\text{اج}}\|$ ؟

4) في أي حالات يكون لديك : $\|\overrightarrow{\text{اب}} + \overrightarrow{\text{اج}}\| > \|\overrightarrow{\text{اب}}\| + \|\overrightarrow{\text{اج}}\|$ ؟

12 . ا ب ج مثلث متقايس الأضلاع .

1) ارسم ممثلا لكل من الشعاعين .

$\overrightarrow{\text{اب}} + \overrightarrow{\text{اج}}$ ؛ $\overrightarrow{\text{اب}} + \overrightarrow{\text{جا}}$

2) قارن بين $\|\overrightarrow{\text{اب}} + \overrightarrow{\text{اج}}\|$ ، $\|\overrightarrow{\text{اب}} + \overrightarrow{\text{جا}}\|$

3) هل ان : $\overrightarrow{\text{اب}} + \overrightarrow{\text{اج}} = \overrightarrow{\text{اب}} + \overrightarrow{\text{جا}}$ ؟

13 . (ا ، ب) ثنائية نقطية غير معدومة . علّم نقطتين ج ، د بحيث يكون الشعاع $\overrightarrow{\text{اد}}$ مجموع $\overrightarrow{\text{اب}}$ و $\overrightarrow{\text{اج}}$ وبحيث يكون المستقيم (اد) عموديا على (ا ب) .

14 . $\overleftarrow{ق}$ ، $\overleftarrow{ك}$ ، $\overleftarrow{ل}$ ، $\overleftarrow{ي}$ أربعةأشعة . أكمل الجدول الآتي :

الكتابة المعطاة	إسم الخاصة المستعملة	الكتابة الناتجة
$\overleftarrow{ق} + \overleftarrow{ك}$	....	$\overleftarrow{ك} + \overleftarrow{ق}$
$\overleftarrow{ق} + (\overleftarrow{ك} + \overleftarrow{ل})$	التجميـــع	....
$\overleftarrow{ق} + (\overleftarrow{ك} + \overleftarrow{ل})$	....	$(\overleftarrow{ق} + \overleftarrow{ك}) + \overleftarrow{ل}$
$\overleftarrow{ق} + \overleftarrow{0}$	....	$\overleftarrow{ق}$
$[\overleftarrow{ق} + (\overleftarrow{ك} + \overleftarrow{ل})] + \overleftarrow{ي}$	....	$[(\overleftarrow{ق} + \overleftarrow{ك}) + \overleftarrow{ل}] + \overleftarrow{ي}$
$[(\overleftarrow{ق} + \overleftarrow{ك}) + \overleftarrow{ل}] + \overleftarrow{ي}$	....	$[\overleftarrow{ق} + (\overleftarrow{ك} + \overleftarrow{ل})] + \overleftarrow{ي}$

15 . $\overleftarrow{ق}$ ، $\overleftarrow{ك}$ ، $\overleftarrow{ل}$ ثلاثة أشعة . استخدم خواص الجمع الشعاعي واذكرها لكي تبرهن أن :

1) $\overleftarrow{ق} + (\overleftarrow{ك} + \overleftarrow{ل}) = (\overleftarrow{ق} + \overleftarrow{ل}) + \overleftarrow{ك}$

2) $\overleftarrow{ق} + (\overleftarrow{ك} + \overleftarrow{ل}) = \overleftarrow{ل} + (\overleftarrow{ق} + \overleftarrow{ك})$

16 . $\overleftarrow{ش_1}$ ؛ $\overleftarrow{ش_2}$ ؛ $\overleftarrow{ش_3}$ ؛ $\overleftarrow{ش_4}$ أربع أشعة ، استخدم خواص الجمع الشعاعي لكي تبرهن أن :

1) $\overleftarrow{ش_1} + (\overleftarrow{ش_2} + \overleftarrow{ش_3}) = \overleftarrow{ش_2} + \overleftarrow{ش_3} + \overleftarrow{ش_1}$.

2) $[\overleftarrow{ش_1} + (\overleftarrow{ش_2} + \overleftarrow{ش_3})] + \overleftarrow{ش_4} = \overleftarrow{ش_1} + \overleftarrow{ش_2} + \overleftarrow{ش_3} + \overleftarrow{ش_4}$

17. ا ب جـ مثلث .

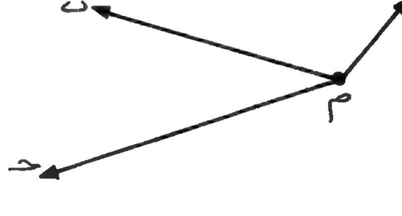
1) إرسم ممثلاً للشعاع $\overleftarrow{اب} + \overleftarrow{اجـ} + \overleftarrow{ب جـ}$

2) علم نقطة ء بحيث : $\overleftarrow{اء} + \overleftarrow{اب} + \overleftarrow{اجـ} + \overleftarrow{ب جـ} = \overleftarrow{0}$

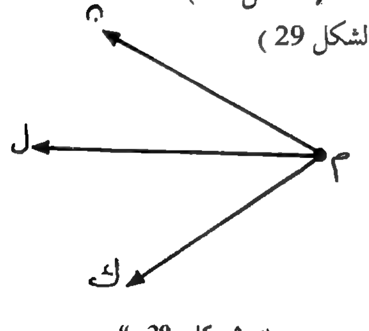
18. شاهد كلا من الشكلين 28 ، 29

إرسم ممثلاً للشعاع $\overleftarrow{م ا} + \overleftarrow{م ب} + \overleftarrow{م جـ}$ (الشكل 28)

إرسم ممثلاً للشعاع $\overleftarrow{م ه} + \overleftarrow{م ل} + \overleftarrow{م ك}$ (الشكل 29)



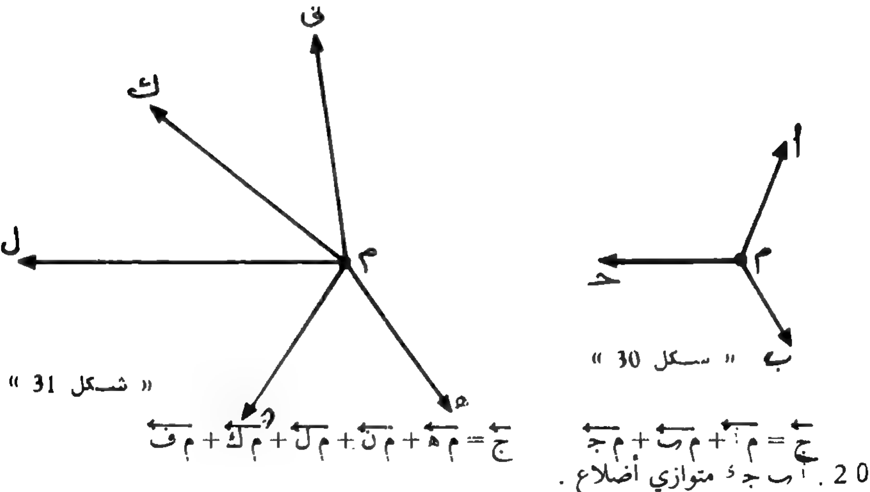
« شكل 28 »



« شكل 29 »

19 . شاهد كلا من الأشكال 30 ، 31 ، 34

ارسم في كل حالة ممثلاً للشعاع المجموع $\overrightarrow{\text{ج}}$ ثم ممثلاً للشعاع ش بحيث $\overrightarrow{\text{ش}} + \overrightarrow{\text{ج}} = \overrightarrow{0}$.



« شكل 31 » « شكل 30 »

$\overrightarrow{\text{ج}} = \overrightarrow{\text{مأ}} + \overrightarrow{\text{مب}} + \overrightarrow{\text{مج}}$ $\overrightarrow{\text{ج}} = \overrightarrow{\text{مه}} + \overrightarrow{\text{من}} + \overrightarrow{\text{مل}} + \overrightarrow{\text{مك}} + \overrightarrow{\text{مف}}$

20 . أ ب ج د متوازي أضلاع .

1) برهن أن : $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{جد}} + \overrightarrow{\text{بج}} + \overrightarrow{\text{دأ}} = \overrightarrow{0}$.

2) إستنتج أن : $\overrightarrow{\text{جد}} + \overrightarrow{\text{بج}} + \overrightarrow{\text{دأ}} = \overrightarrow{\text{بأ}}$

21 . $\overrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overrightarrow{\text{جد}}$ شعاعان .

1) عين الشعاع $\overrightarrow{\text{س}}$ بحيث : $\overrightarrow{\text{س}} + \overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{جد}}$

2) إرسم ممثلاً للشعاع $\overrightarrow{\text{س}}$.

22 . $\overrightarrow{\text{أب}}$ ، $\overrightarrow{\text{جد}}$ ، $\overrightarrow{\text{مه}}$ ثلاث أشعة .

1) عين الشعاع $\overrightarrow{\text{س}}$ بحيث : $\overrightarrow{\text{أب}} + (\overrightarrow{\text{س}} + \overrightarrow{\text{جد}}) = \overrightarrow{\text{مه}}$.

2) إرسم ممثلاً للشعاع $\overrightarrow{\text{س}}$.

23 . أ ؛ ب ؛ ج ؛ د ؛ ه خمس نقط من المستوى .

قارن بين $\overrightarrow{\text{هأ}} + \overrightarrow{\text{أد}}$ و $\overrightarrow{\text{هب}} + \overrightarrow{\text{بج}} + \overrightarrow{\text{جد}}$.

24 . أ ؛ ب ؛ ج ؛ د أربع نقاط ، بحيث $\overrightarrow{\text{أج}} = \overrightarrow{\text{دب}}$.

برهن أن : $\overrightarrow{\text{أد}} + \overrightarrow{\text{بج}} = \overrightarrow{0}$.

25 . أ ؛ ب ؛ ج ؛ د أربع نقاط بحيث $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{أج}} + \overrightarrow{\text{جب}}$.

1) برهن أن : $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{دج}} = \overrightarrow{\text{أج}} + \overrightarrow{\text{دب}}$.

2) برهن أن : $\overrightarrow{\text{أج}} + \overrightarrow{\text{بد}} = \overrightarrow{\text{أد}} + \overrightarrow{\text{بج}}$.

26 . أ ، ب نقطتان. هل تستطيع في كل حالة إيجاد نقطة ه بحيث :

1) $\overrightarrow{\text{هأ}} + \overrightarrow{\text{هب}} = \overrightarrow{\text{أب}}$ ؟

2) $\overrightarrow{\text{هأ}} - \overrightarrow{\text{هب}} = \overrightarrow{\text{أب}}$

3) $\overrightarrow{\text{هب}} - \overrightarrow{\text{هأ}} = \overrightarrow{\text{أب}}$

27 . ا ب ج مثلث . أ' ؛ ب' ؛ ج' هي على الترتيب منتصفات قطع المستقيم [ب ج] ، [ا ج] ، [ا ب] . ث مركز ثقل المثلث ا ب ج .

1) ارسم ممثلاً مبدؤه ث للشعاع : $\overleftarrow{\text{ث ب}} + \overleftarrow{\text{ث ج}}$.

2) بين أن : $\overleftarrow{\text{ث ا}} + \overleftarrow{\text{ث ب}} + \overleftarrow{\text{ث ج}} = \overleftarrow{0}$

28 . $\overleftarrow{\text{ا ب}}$ شعاع . تا تطبيق من المستوي (ى) في نفسه يرفق بكل نقطة م النقطة م' بحيث : $\overleftarrow{\text{م م'}} = \overleftarrow{\text{ا ب}}$.

ج ، د نقطتان من (ى) . سم ج' ، د' صورتي ج ، د على الترتيب بواسطة التطبيق تا .

1) برهن أن : $\overleftarrow{\text{ج د}} = \overleftarrow{\text{ج' د'}}$

2) ضع : $\text{م}_1 = $ تا (م') ؛ $\text{م}_2 = $ تا (م_1)

علم النقاط م' ؛ م_1 ؛ م_2 . ثم ارسم ممثلا للشعاع : $\overleftarrow{\text{م م}_2}$.

29 . $\overleftarrow{\text{ه}}$ ، $\overleftarrow{\text{ك}}$ شعاعان

1) إرسم ممثلاً للشعاع ه + ك ثم ممثلاً للشعاع $\overleftarrow{\text{س}}$ بحيث :

$(\overleftarrow{\text{ه}} + \overleftarrow{\text{ك}}) + (\overleftarrow{\text{ه}} + \overleftarrow{\text{ك}}) + (\overleftarrow{\text{ه}} + \overleftarrow{\text{ك}}) = \overleftarrow{\text{س}}$

2) إرسم ممثلاً للشعاع $\overleftarrow{\text{ج}}$ بحيث :

$(\overleftarrow{\text{ه}} + \overleftarrow{\text{ه}} + \overleftarrow{\text{ه}}) + (\overleftarrow{\text{ك}} + \overleftarrow{\text{ك}} + \overleftarrow{\text{ك}}) = \overleftarrow{\text{ج}}$

3) ما هي خواص الجمع الشعاعي التي تسمح بكتابة ان : $\overleftarrow{\text{س}} = \overleftarrow{\text{ج}}$ ؟

30 . $\overleftarrow{\text{ه}}$ ، $\overleftarrow{\text{ك}}$ شعاعان .

1) عين الشعاع $\overleftarrow{\text{س}}$ بحيث أن :

$(\overleftarrow{\text{ه}} + \overleftarrow{\text{س}}) + \overleftarrow{\text{ك}} = \overleftarrow{\text{ه}}$

2) برهن أن : $\overleftarrow{\text{ك}} + \overleftarrow{\text{س}} + \overleftarrow{\text{ك}} = \overleftarrow{\text{ك}}$

31 . $\overleftarrow{\text{ه}}$ ، $\overleftarrow{\text{ك}}$ ، $\overleftarrow{\text{ي}}$ ثلاثة أشعة .

1) عين الشعاع $\overleftarrow{\text{س}}$ بحيث :

$(\overleftarrow{\text{ه}} + \overleftarrow{\text{ي}} + \overleftarrow{\text{س}}) + \overleftarrow{\text{ه}} = \overleftarrow{\text{ه}} + \overleftarrow{\text{ك}} + \overleftarrow{\text{ي}}$.

2) برهن أن :

$\overleftarrow{\text{ه}} + \overleftarrow{\text{س}} + \overleftarrow{\text{س}} + \overleftarrow{\text{ه}} = \overleftarrow{\text{ك}} + \overleftarrow{\text{ك}}$

32 . $\overleftarrow{\text{ه}}$ ، $\overleftarrow{\text{ك}}$ ، $\overleftarrow{\text{ل}}$ ، $\overleftarrow{\text{ي}}$ أربعة أشعة . إرسم ممثلاً لكل منها علما بأن :

$\overleftarrow{\text{ه}} + \overleftarrow{\text{ل}} = \overleftarrow{\text{ك}} + \overleftarrow{\text{ي}}$ و $\overleftarrow{\text{ه}} \neq \overleftarrow{\text{ك}}$

9 ضرب شعاع بعدد حقيقي

1 ـ جداء شعاع بعدد ناطق

1.1 . جداء شعاع بعدد طبيعي :

• $\overleftarrow{و}$ شعاع ممثله (أ ، ب) (شكل 1)

« شكل 1 »

إن الشعاع $\overleftarrow{و} + \overleftarrow{و}$ هو مجموع شعاعين مساويين للشعاع $\overleftarrow{و}$

تقول إن الشعاع $\overleftarrow{و} + \overleftarrow{و}$ هو **جداء الشعاع** $\overleftarrow{و}$ **بالعدد الطبيعي 2**

تقول ايضا انك **ضربت الشعاع** $\overleftarrow{و}$ **في 2**

تكتب : $\overleftarrow{و} + \overleftarrow{و} = 2 \overleftarrow{و}$

سم جـ النقطة بحيث : (أ ، ب) ~ (ب ، جـ)

تستنتج أن ب منتصف القطعة [أ جـ]

تعلم أن : $\overleftarrow{أب} + \overleftarrow{ب جـ} = \overleftarrow{أ جـ}$

تستنتج أن الثنائية النقطية (أ ، جـ) ممثل للشعاع $2\overleftarrow{و}$

يمكنك أن تقول إن الشعاع $\overleftarrow{أ جـ}$ هو جداء الشعاع $\overleftarrow{أب}$ بالعدد الطبيعي 2 .

تكتب $\overleftarrow{أ جـ} = 2 \overleftarrow{أب}$

تلاحظ أن :

• النقط أ ، ب ، جـ على استقامة واحدة .
• الثنائيتين النقطيتين (أ ، ب) ، (أ ، جـ) من نفس الاتجاه .
• أ جـ = 2 أ ب

تستنتج أن :

• للشعاعين $\overleftarrow{و}$ و $2\overleftarrow{و}$ نفس المنحني ونفس الاتجاه .
• $\| 2\overleftarrow{و} \| = 2 \| \overleftarrow{و} \|$
• تعلم أنه يمكنك كتابة الشعاع $(\overleftarrow{و} + \overleftarrow{و}) + \overleftarrow{و}$ على الشكل $\overleftarrow{و} + \overleftarrow{و} + \overleftarrow{و}$

تقول إن هذا الشعاع هو مجموع ثلاثة أشعة كل منها يساوي $\overleftarrow{و}$

تقول أيضا ان هذا الشعاع هو جداء **الشعاع $\vec{و}$ بالعدد الطبيعي 3** وتقول أيضا انك **ضربت الشعاع $\vec{و}$ في 3**

تكتب : $\vec{و} + \vec{و} + \vec{و} = 3\,\vec{و}$

سم ى نقطة من المستوي بحيث :

ى ∋ (ا ب) و (ا ، ب) ~ (ج ، ى) (شكل 2)

ا ب ج د

« شكل 2 »

تعلم أن : ($\overrightarrow{اب} + \overrightarrow{بج}$) + $\overrightarrow{جى}$ = $\overrightarrow{اج} + \overrightarrow{جى} = \overrightarrow{اى}$

تعلم ايضا أن : (ا ، ب) ~ (ب ، ج) و (ب ، ج) ~ (ج ، ى)

تستنتج ان الثنائية النقطية (ا ، ى) ممثل للشعاع $3\,\vec{و}$

إن الشعاع $\overrightarrow{اى}$ هو جداء الشعاع $\overrightarrow{اب}$ بالعدد 3 : $\overrightarrow{اى} = 3\,\overrightarrow{اب}$

تلاحظ أن :

- النقط ا ، ب ، ى على استقامة واحدة
- الثنائيتين (ا ، ب) و (ا ، ى) من نفس الاتجاه
- ا ى = 3 ا ب

تستنتج أن :

- للشعاعين $\vec{و}$ و $3\,\vec{و}$ نفس المنحى ونفس الاتجاه
- $\| 3\,\vec{و} \| = 3\,\| \vec{و} \|$
- يمكنك أن تكتب الشعاع ($\vec{و} + \vec{و} + \vec{و}$) + ($\vec{و} + \vec{و}$) على الشكل $\vec{و} + \vec{و} + \vec{و} + \vec{و} + \vec{و}$

تقول إن هذا الشعاع هو مجموع خمسة أشعة كل منها يساوي $\vec{و}$

تقول أيضا ان هذا الشعاع هو **جداء الشعاع $\vec{و}$ بالعدد الطبيعي 5** أو جداء $\vec{و}$ ب 5 . ترمز لهذا الشعاع بالرمز $5\,\vec{و}$

يعطيك الشكل 3 ممثلا (ا ، م) للشعاع $5\,\vec{و}$.

إن الشعاع $\overrightarrow{ام}$ هو جداء $\overrightarrow{اب}$ بالعدد 5 :

$\overrightarrow{ام} = 5\,\overrightarrow{اب}$

ا ب ج د هـ م

« شكل 3 »

تلاحظ مرة أخرى أن :

- للشعاعين $\vec{و}$ و $5\,\vec{و}$ نفس المنحى ونفس الاتجاه
- $\| 5\,\vec{و} \| = 5\,\| \vec{و} \|$

تعريف :

> $\vec{و}$ شعاع ، ن عدد طبيعي أكبر من 1
> **جداء الشعاع $\vec{و}$ بالعدد الطبيعي** ن هو الشعاع الذي يساوي مجموع ن شعاع كل منها يساوي $\vec{و}$

تكتب $\underbrace{\vec{و}+\vec{و}+......+\vec{و}+\vec{و}}_{ن \text{ حدا}}=$ ن $\vec{و}$

يمكنك أن تقول أنه يحصل على ن $\vec{و}$ **بضرب** $\vec{و}$ في ن

تذكر أن :

- للشعاع ن $\vec{و}$ نفس منحى ونفس اتجاه الشعاع $\vec{و}$
- $\|$ن$\vec{و}\|$ = ن $\|\vec{و}\|$

نتفق على أن : 1 $\vec{و}=\vec{و}$

وتقبل أن : 0 $\vec{و}=\vec{0}$ ؛ ن $\vec{0}=\vec{0}$

أ) أرسم ممثلا (أ ، ب) لشعاع $\vec{و}$

أرسم الممثل الذي مبدأه أ لكل من الأشعة الآتية :

4 $\vec{و}$ ، 6 $\vec{و}$ ، 10 $\vec{و}$

ب) أرسم ممثلا (أ ، ب) لشعاع $\vec{و}$

أ′ نقطة من المستوي بحيث : أ ، ب ، أ′ ليست على استقامة واحدة .

أرسم الممثل الذي مبدأه أ′ لكل من الأشعة :

$\vec{و}$ ، 2 $\vec{و}$ ، 3 $\vec{و}$ ، 4 $\vec{و}$ ، 5 $\vec{و}$

2.1 . جداء شعاع بعدد صحيح :

ج أ ب

« شكل 4 »

$\vec{و}$ شعاع ممثله (أ ، ب) (شكل 4)

تعرف أن ممثل معاكسه $-\vec{و}$ هو (ب ، أ) (شكل 4)

تعرف أن الشعاع $(-\vec{و})+(-\vec{و})$ هو جداء الشعاع $-\vec{و}$ بالعدد 2 .

لديك : $(-\overleftarrow{و}) + (-\overleftarrow{و}) = 2(-\overleftarrow{و})$

تقول إن هذا الشعاع هو جداء الشعاع $\overleftarrow{و}$ بالعدد الصحيح -2

تكتب $(-\overleftarrow{و}) + (-\overleftarrow{و}) = -2\overleftarrow{و}$

إن الثنائية النقطية (ب ، ج) ممثل للشعاع $-2\overleftarrow{و}$ (شكل 4)

يمكنك أن تكتب : $\overleftarrow{ب ج} = -2\,\overleftarrow{أ ب}$

تلاحظ أن :

- النقط أ ، ب ، ج على استقامة واحدة .
- الثنائيتين النقطيتين (أ ، ب) و (ب ، ج) من اتجاهين مختلفتين .
- ب ج $= 2$ أ ب

تعرف أن : $|-2| = 2$

تستنتج أن :

- للشعاعين $\overleftarrow{و}$ ، $-2\overleftarrow{و}$ نفس المنحى
- للشعاعين $\overleftarrow{و}$ ، $-2\overleftarrow{و}$ اتجاهان مختلفان
- $\|-2\overleftarrow{و}\| = |-2| \; \|\overleftarrow{و}\|$

بنفس الطريقة ترى أن :

- للشعاعين $\overleftarrow{و}$ ، $-3\overleftarrow{و}$ نفس المنحى
- للشعاعين $\overleftarrow{و}$ ، $-3\overleftarrow{و}$ اتجاهان مختلفتان
- $\|-3\overleftarrow{و}\| = |-3| \; \|\overleftarrow{و}\|$

تعريف :

> **جداءشعاع $\overleftarrow{و}$ بعدد صحيح م** هو الشعاع $\overleftarrow{ش}$ بحيث يكون :
>
> - للشعاعين $\overleftarrow{و}$ و $\overleftarrow{ش}$ نفس المنحى
> - للشعاعين $\overleftarrow{و}$ و $\overleftarrow{ش}$ نفس الاتجاه اذا كان م موجبا ، واتجاهان مختلفان اذا كان م سالبا .
> - $\|\overleftarrow{ش}\| = |م| \; \|\overleftarrow{و}\|$

ترمز للشعاع $\overrightarrow{ش}$ بالرمز م $\overrightarrow{و}$: $\overrightarrow{ش}$ = م $\overrightarrow{و}$.
يمكنك أن تقول انه يحصل على الشعاع م $\overrightarrow{و}$ بضرب $\overrightarrow{و}$ في م .

ا) أرسم ممثلا (ا ، ب) لشعاع $\overrightarrow{و}$
أرسم الممثل الذي مبدأه ا لكل من الأشعة الآتية :
– $\overrightarrow{و}$، 3 $\overrightarrow{و}$، – 2 $\overrightarrow{و}$، – 4 ، 6 $\overrightarrow{و}$، – 5 $\overrightarrow{و}$
ب) وحدة الأطوال هي السنتيمتر .
أرسم ممثلا (ا ، ب) لشعاع $\overrightarrow{و}$ بحيث : $||\overrightarrow{و}|| = 1,5$
أرسم ممثلا لكل من الأشعة الآتية :
4 $\overrightarrow{و}$، – 3 $\overrightarrow{و}$، 5 $\overrightarrow{و}$، – 6 $\overrightarrow{و}$، – 7 $\overrightarrow{و}$
أوجد معيار كل واحد من هذه الأشعة

3.1 . جداء شعاع بعدد ناطق :

$\overrightarrow{و}$ شعاع وأحد ممثليه (ا ، ب) (شكل 5)
• علم على القطعة [ا ب] النقطة جـ بحيث :

ا جـ = $\frac{1}{3}$ ا ب (شكل 5)

ا جـ د ب
« شكل 5 »

(ا′ ، ب′) ممثل آخر لشعاع $\overrightarrow{و}$
علم على القطعة [ا′ ب′] النقطة جـ′ بحيث :

ا′ جـ′ = $\frac{1}{3}$ ا′ ب′ (شكل 6)

ا′ جـ′ د′ ب′
« شكل 6 »

لديك : (ا ، ب) ~ (ا′ ، ب′) . تستنتج أن : ا ب = ا′ ب′
و (ا ب) // (ا′ ب′)

لديك : ا′ جـ′ = $\frac{1}{3}$ ا′ ب′ و ا ب = ا′ ب′ ومنه : ا′ جـ′ = $\frac{1}{3}$ ا ب

ولكن : ا جـ = $\frac{1}{3}$ ا ب ومنه ا′ جـ′ = ا جـ

لديك : (ا ب) // (ا′ ب′) و جـ ∋ (ا ب) و جـ′ ∋ (ا′ ب′)

ومنه : (ا جـ) // (ا′ جـ′)

لديك : ا′ جـ′ = ا جـ و (ا جـ) // (ا′ جـ′)

تستنتج أن الرباعي ا جـ جـ′ ا′ متوازي أضلاع .

تستنتج أن : (ا ، جـ) ~ (ا′ ، جـ′)

سم $\overleftarrow{\text{ش}}$ الشعاع الذي أحد ممثليه (ا ، ب)

تلاحظ أن (ا′ ، ب′) ممثل آخر للشعاع $\overleftarrow{\text{ش}}$

تقول إن الشعاع $\overleftarrow{\text{ش}}$ **جداء الشعاع $\overleftarrow{\text{و}}$ بالعدد الناطق** $\frac{1}{3}$

تكتب $\overleftarrow{\text{ش}} = \frac{1}{3}\overleftarrow{\text{و}}$

تلاحظ أنه :

- للشعاع $\overleftarrow{\text{ش}}$ نفس منحى ونفس اتجاه $\overleftarrow{\text{و}}$
- $\|\overleftarrow{\text{ش}}\| = \frac{1}{3}\|\overleftarrow{\text{و}}\|$
- علم على القطعة [ا ب] النقطة ء بحيث : ا ء = $\frac{2}{3}$ ا ب (شكل 5)

علم على القطعة [ا′ ب′] النقطة ء′ بحيث : ا′ ء′ = $\frac{2}{3}$ ا′ ب′ (شكل 6)

بين أن : (ا ، ء) ~ (ا′ ، ء′)

سم $\overleftarrow{\text{ي}}$ الشعاع الذي أحد ممثليه الثنائية النقطية (ا ، ء)

تقول ان الشعاع $\overleftarrow{\text{ي}}$ هو جداء الشعاع $\overleftarrow{\text{و}}$ بالعدد الناطق $\frac{2}{3}$

تكتب : $\overleftarrow{\text{ي}} = \frac{2}{3}\overleftarrow{\text{و}}$.

تلاحظ أن :

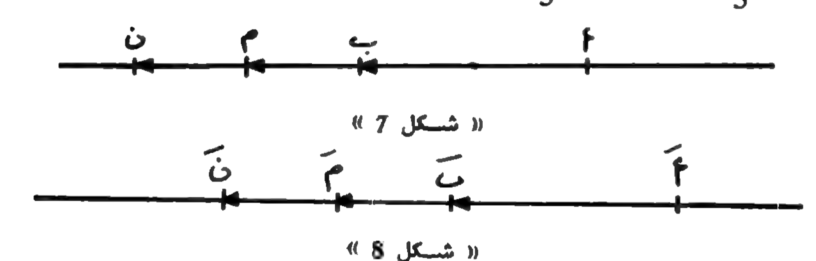
- للشعاعين $\overleftarrow{\text{و}}$ و $\overleftarrow{\text{ي}}$ نفس المنحى ونفس الاتجاه
- $\|\overleftarrow{\text{ي}}\| = \frac{2}{3}\|\overleftarrow{\text{و}}\|$

• علم على المستقيم (أب)، نقطة م ونقطة ﻫ بحيث :

• م ∉ [أب] و ﻫ ∉ [أب]

• (أ، ب) و (أ، م) من اتجاهين مختلفتين (أ، ب)، (أ، ﻫ) من اتجاهين مختلفتين .

• أ م = $\frac{1}{3}$ أ ب و أ ﻫ = $\frac{2}{3}$ أ ب (شكل 7)



« شكل 7 »

« شكل 8 »

علم على المستقيم (أ′ب′) نقطة م′ ونقطة ﻫ بحيث :

• م′ ∉ [أ′ب′] و ﻫ′ ∉ [أ′ب′]

• (أ′، ب′) و (أ′، م′) من اتجاهين مختلفين و (أ′، ب′) و (أ′، ب′) و (أ′، ﻫ′) من اتجاهين مختلفين

• أ′م′ = $\frac{1}{3}$ أ′ب′ و أ′ﻫ′ = $\frac{2}{3}$ أ′ب′ (شكل 8)

بين أن : (أ، م) ~ (أ′، م′) و (أ، ﻫ) ~ (أ′، ﻫ)

سم $\overleftarrow{و}$ الشعاع الذي ممثله الثنائية النقطية (أ، م) و $\overleftarrow{ش}$ الشعاع الذي ممثله الثنائية النقطية (أ، ﻫ)

تقول إن :

$\overleftarrow{و}$ هو جداء الشعاع $\overleftarrow{و}$ بالعدد الناطق $-\frac{1}{3}$

$\overleftarrow{ش}$ هو جداء الشعاع $\overleftarrow{و}$ بالعدد الناطق $-\frac{2}{3}$

تكتب : $\overleftarrow{و} = -\frac{1}{3}\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{ش} = -\frac{2}{3}\overleftarrow{و}$

تلاحظ أن : • للشعاعين $\overleftarrow{و}$ و $\overleftarrow{و'}$ نفس المنحى

• للشعاعين $\overleftarrow{و}$ و $\overleftarrow{و'}$ اتجاهان مختلفتان

• $\| -\frac{1}{3} \overleftarrow{و} \| = | -\frac{1}{3} | \; \| \overleftarrow{و} \|$

تلاحظ أيضا أن :

• للشعاعين $\overleftarrow{و}$ و $\overleftarrow{ش}$ نفس المنحى

• للشعاعين $\overleftarrow{و}$ و $\overleftarrow{ش}$ اتجاهان مختلفتان .

• $\| -\frac{2}{3} \overleftarrow{و} \| = | -\frac{2}{3} | \; \| \overleftarrow{و} \|$

تعريف :

> **جداء شعاع $\overleftarrow{و}$ بعدد ناطق ق** هو الشعاع $\overleftarrow{ش}$ بحيث :
>
> • للشعاعين $\overleftarrow{و}$ و $\overleftarrow{ش}$ نفس المنحى
>
> • للشعاعين $\overleftarrow{و}$ و $\overleftarrow{ش}$ نفس الاتجاه اذا كان ق موجبا
> واتجاهان مختلفتان اذا كان ق سالبا .
>
> • $\| \overleftarrow{ش} \| = | ق | \; \| \overleftarrow{و} \|$

يرمز للشعاع $\overleftarrow{ش}$ بالرمز ق . $\overleftarrow{و}$: $\overleftarrow{ش} =$ ق $\overleftarrow{و}$

يمكنك أن تقول انه يحصل على ق $\overleftarrow{و}$ بضرب $\overleftarrow{و}$ في ق

أ) أرسم ممثلا (أ ، ب) لشعاع $\overleftarrow{و}$

أرسم الممثل الذي مبدأه أ لكل من الأشعة الآتية :

$$\frac{1}{4}\overleftarrow{و} ، \frac{3}{4}\overleftarrow{و} ، \frac{8}{3}\overleftarrow{و} ، -\frac{5}{4}\overleftarrow{و} ، \frac{7}{10}\overleftarrow{و} ، -\frac{2}{5}\overleftarrow{و}$$

ب) وحدة الأطوال هي السنتيمتر .

أرسم ممثلا (أ ، ب) للشعاع $\overleftarrow{و}$ بحيث : $\| \overleftarrow{و} \| = 2$

أرسم ممثلا لكل من الأشعة الآتية :

$$1{,}5\overleftarrow{و} ، -4{,}25\overleftarrow{و} ، \frac{6}{5}\overleftarrow{و} ، -10{,}1\overleftarrow{و} ، 8{,}4\overleftarrow{و}$$

---

2 ـ ضرب شعاع بعدد حقيقي

1.2 . جداء شعاع بعدد حقيقي :

تعريف :

جداء شعاع $\vec{و}$ بعدد حقيقي س هو الشعاع $\vec{ش}$ بحيث يكون :

- للشعاعين $\vec{و}$ و $\vec{ش}$ نفس المنحى
- للشعاعين $\vec{و}$ و $\vec{ش}$ نفس الاتجاه اذا كان س موجبا
  واتجاهان مختلفتان اذا كان س سالبا
- $\|س\,\vec{و}\| = |س| \,.\, \|\vec{و}\|$.

ترمز للشعاع $\vec{ش}$ بالرمز س $\vec{و}$: $\vec{ش}$ = س $\vec{و}$

يمكنك أن تقول انه يحصل على س $\vec{و}$ بضرب $\vec{و}$ في س

عندما يكون س عددا أصما لا يمكنك رسم ممثل للشعاع س $\vec{و}$.

تكتفي عندئذ برسم ممثل للشعاع ك $\vec{و}$ ، حيث ك قيمة مقربة للعدد الحقيقي س .

- تقبل أنه اذا كان : س $\vec{و}$ = $\vec{0}$ فإن س = 0 أو $\vec{و}$ = $\vec{0}$

أ) وحدةالأطوال هي الديسيمتر ، أرسم ممثلا (ا ، ب)
للشعاع $\vec{و}$ حيث : $\|\vec{و}\| = 1$
أرسم ممثل الشعاع $\sqrt{2}\,\vec{و}$ الذي مبدأه ا مع أخذ 1,41
كقيمة مقربة للعدد $\sqrt{2}$.
أرسم ممثل للشعاع $-\sqrt{3}\,\vec{و}$ الذي مبدأه ا مع أخذ 1,73 كقيمة مقربة
للعدد $\sqrt{3}$.

ب) أرسم ممثلا (ا ، ب) لشعاع $\vec{و}$ ثم الممثل لشعاع $\vec{ش}$ الذي مبدأه ب .
أرسم ممثل الشعاع $\frac{2}{3}\vec{و} + 3\,\vec{ش}$ الذي مبدأه ا .

2.2 . ضرب شعاع بعدد حقيقي :

انك رأيت أنه يمكنك أن ترفق بكل ثنائية (س ، وَ) من الجداء الديكارتي ح × شـ الشعاع س وَ الذي هو جداء الشعاع وَ بالعدد الحقيقي س .

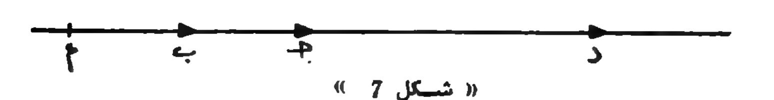
تكون هكذا قد عينت تطبيقا من ح × شـ في شـ

تعريف :

> يسمى التطبيق من ح × شـ في شـ الذي يرفق بكل ثنائية (س ، و) من ح × شـ الشعاع س وَ **ضرب شعاع بعدد حقيقي**

3.2 . خواص ضرب الشعاع بعدد حقيقي

• وَ شعاع ممثله (أ ، ب) (شكل 7)



« شكل 7 »

ابحث عن ممثل الشعاع 3 (2 وَ)

إن الثنائية النقطية (أ ، جـ) ممثل للشعاع 2 وَ (شكل 7)

إن الثنائية النقطية (أ ، د) ممثل للشعاع 3 (2 وَ)

لديك : أجـ = وَ + وَ و أد = أجـ + أجـ + أجـ = 3 (2 وَ)

ومنه أد = (وَ + وَ) + (وَ + وَ) + (وَ + وَ)

تعرف أن الجمع الشعاعي تجميعي .

تستنتج أن : أد = وَ + وَ + وَ + وَ + وَ + وَ ومنه : أد = 6 وَ

لكن : 6 = 3 × 2 = 2 × 3 ومنه : أد = (3 × 2) وَ = (2 × 3) وَ

ومنه : 3 (2 وَ) = (3 × 2) وَ = (2 × 3) وَ = 6 وَ

تقبل أن :

> من أجل كل عددين حقيقيين س ، ع ومن أجل كل شعاع وَ
> س (ع وَ) = ع (س وَ) = (س ع) وَ

• ا و ب عددان طبيعيان ، $\overrightarrow{و}$ شعاع .

تعرف أن الشعاع (ا + ب) $\overrightarrow{و}$ هو مجموع ا + ب شعاعا مساويا للشعاع $\overrightarrow{و}$.
لكن مجموع ا + ب شعاعا مساويا للشعاع $\overrightarrow{و}$ هو أيضا مجموع ا شعاعا مساويا للشعاع $\overrightarrow{و}$ و ب شعاعا مساويا للشعاع $\overrightarrow{و}$

تستنتج أن : (ا + ب) $\overrightarrow{و}$ = ا $\overrightarrow{و}$ + ب $\overrightarrow{و}$

تقبل أنه :

من أجل كل عددين حقيقيين س و ع ، ومن أجل كل شعاع $\overrightarrow{و}$:   (س + ع) $\overrightarrow{و}$ = س $\overrightarrow{و}$ + ع $\overrightarrow{و}$.

• ا عدد طبيعي $\overrightarrow{و}$ و $\overrightarrow{ش}$ شعاعان .

تعرف أن ا ($\overrightarrow{و}$ + $\overrightarrow{ش}$) = $\underbrace{(\overrightarrow{و} + \overrightarrow{ش}) + (\overrightarrow{و} + \overrightarrow{ش}) + \ldots + (\overrightarrow{و} + \overrightarrow{ش})}_{\text{ا حدا}}$

إن تبديلية و تجميعية الجمع الشعاعي تمكنك من كتابة :

$\underbrace{(\overrightarrow{و} + \overrightarrow{ش}) + (\overrightarrow{و} + \overrightarrow{ش}) + \ldots + (\overrightarrow{و} + \overrightarrow{ش})}_{\text{ا حدا}}$ =

$\underbrace{(\overrightarrow{و} + \overrightarrow{و} + \overrightarrow{و} + \ldots + \overrightarrow{و})}_{\text{ا حدا}}$ + $\underbrace{(\overrightarrow{ش} + \overrightarrow{ش} + \overrightarrow{ش} + \ldots + \overrightarrow{ش})}_{\text{ا حدا}}$

تستنتج أن ا ($\overrightarrow{و}$ + $\overrightarrow{ش}$) = ا $\overrightarrow{و}$ + ا $\overrightarrow{ش}$

تقبل أن :

من أجل كل عدد حقيقي س ، ومن أجل كل شعاعين $\overrightarrow{و}$، $\overrightarrow{ش}$:   س ($\overrightarrow{و}$ + $\overrightarrow{ش}$) = س $\overrightarrow{و}$ + س $\overrightarrow{ش}$.

أ) $\vec{و}$ شعاع

ارسم بكيفيتين مختلفتين ، ممثلا لكل من الأشعة الآتية :

$2\left(-\frac{3}{4}\vec{و}\right)$ ، $7\left(\frac{1}{2}\vec{و}\right)$ ، $-\frac{8}{3}\vec{و}$ ، $-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\vec{و}\right)$

ب) $\vec{و}$ شعاع

ارسم بكيفيتين مختلفتين ، ممثلا لكل من الأشعة الآتية :

$\left(\frac{2}{3}+4\right)\vec{و}$ ، $\left(-8+\frac{9}{2}\right)\vec{و}$ ، $\frac{-7}{4}\vec{و}+2\vec{و}$ ، $\frac{2}{3}\vec{و}+\frac{-5}{2}\vec{و}$

جـ) $\vec{و}$ و $\vec{ش}$ شعاعان بحيث حاملاهما غير متوازيين .

ارسم بكيفيتين مختلفتين ، ممثلا لكل من الأشعة الآتية :

$\frac{2}{3}\left(\vec{و}+\vec{ش}\right)$ ، $\left(\frac{-7}{4}\right)\vec{و}+\left(\frac{-7}{4}\right)\vec{ش}$ ، $3,2\left(\vec{و}+\vec{ش}\right)$ ،

$-8,4\left(\vec{و}+\vec{ش}\right)$

4.2 ـ الأشعة المتوازيــة :

- $\vec{و}$ شعاع غير معدوم ممثله (أ ، ب)

  $\vec{ش}$ شعاع غير معدوم ممثله (حـ ، ى)

  بحيث : (أب) // (حـ ى) (شكل 8)

أ ب

جـ د

« شكل 8 »

تعريـف :

> يكون الشعاع غير المعدوم $\vec{ش}$ الذي ممثله (حـ ، ى) **متوازيا** للشعاع غير المعدوم و الذي ممثله (أ ، ب) إذا كان المستقيمان (جـ ى) و (أ ب) متوازيين .

تلاحظ أنه اذا كان $\vec{ش}$ موازيا للشعاع و فإن و يكون موازيا للشعاع ش

تقول إن الشعاعين $\vec{ش}$ و $\vec{و}$ **متوازيان**

• ا عدد حقيقي غير معدوم .

تعرف أن للشعاعين $\overleftarrow{و}$ و ا$\overleftarrow{و}$ نفس المنحى

تستنتج أن الشعاع ا$\overleftarrow{و}$ يوازي $\overleftarrow{و}$

تقبل البديهية الآتية :

بديهيـة :

اذا كان الشعاع $\overleftarrow{ش}$ موازيا للشعاع غير المعدوم $\overleftarrow{و}$ فإنه يوجد عدد حقيقي واحد غير معدوم س وواحد فقط بحيث : $\overleftarrow{ش}$ = س $\overleftarrow{و}$.

• تلاحظ أنه :

إذا كان الشعاع $\overleftarrow{ش}$ معدومافإنه من أجل كل شعاع غير معدوم $\overleftarrow{و}$:

$\overleftarrow{ش} = \overleftarrow{0} = 0$. $\overleftarrow{و}$

نتفق على أن الشعاع المعدوم يوازي كل شعاع $\overleftarrow{و}$.

• تلاحظ ان شعاعا غير معدوم لا يمكن أن يكون موازيا للشعاع المعدوم .

ا) $\overleftarrow{و}$ و $\overleftarrow{ش}$ شعاعان بحيث : $\overleftarrow{و}$ ≠ $\overleftarrow{0}$ و $\overleftarrow{ش}$ ≠ $\overleftarrow{0}$

بين أنه : اذا وجد عدد حقيقي س بحيث : $\overleftarrow{ش}$ = س $\overleftarrow{و}$

فانه يوجد عدد حقيقي سَ بحيث : $\overleftarrow{و}$ = سَ $\overleftarrow{ش}$.

عين العدد الحقيقي سَ .

ب) ا عدد حقيقي غير معدوم . $\overleftarrow{ي}$ شعاع .

بين أنه : يوجد شعاع $\overleftarrow{ص}$ واحد فقط بحيث يكون : ا $\overleftarrow{ص}$ = $\overleftarrow{ي}$.

تمارين :

1 . 1) أرسم ممثلا (ا ، ب) لشعاع غير معدوم $\vec{ه}$.

2) أرسم ممثلي الشعاعين $2\,\overrightarrow{اب}$ ، $5\,\overrightarrow{اب}$ اللذين مبدأهما ا .

3) ارسم الممثل الذي مبدأه ب لكل من الأشعة $2\,\overrightarrow{با}$ ، $5\,\overrightarrow{با}$ ، $2\,\overrightarrow{اب}$.

2 . 1) ارسم ممثلا (ا ، ب) لشعاع غير معدوم $\vec{ه}$.

2) ارسم ممثلا لكل من الأشعة التالية : $2\,\vec{ه}$ ، $-2\,\vec{ه}$ ، $3\,\vec{ه}$ ، $-5\,\vec{ه}$.

3) ارسم ممثلا لكل من الأشعة الآتية :

$2\,\vec{ه}+(-5\,\vec{ه})$ ؛ $(-2\,\vec{ه})+2\,\vec{ه}$ ؛ $3\,\vec{ه}+2\,\vec{ه}$ ؛ $3\,\vec{ه}+(-2\,\vec{ه})$.

3 . ا ، ب ، حـ ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة .

أشطب ما هو خطأ :

$\overrightarrow{اب}$ يوازي $2\,\overrightarrow{اب}$ $\overrightarrow{اب}$ يوازي $\overrightarrow{احـ}$

$\overrightarrow{احـ}$ يوازي $\overrightarrow{بحـ}$ $\overrightarrow{بحـ}$ يوازي $\overrightarrow{احـ}$

$\overrightarrow{حـب}$ يوازي $\overrightarrow{بحـ}$ $\overrightarrow{حـب}$ يوازي $-\overrightarrow{بحـ}$

$\overrightarrow{با}$ يوازي $-3\,\overrightarrow{اب}$

4 . ا ب حـ ء متوازي أضلاع . أشطب ما هو خطأ :

$\overrightarrow{اب}$ و $\overrightarrow{حـء}$ متوازيان $\overrightarrow{احـ}$ و $\overrightarrow{بء}$ متوازيان

$\overrightarrow{اء}$ و $\overrightarrow{اب}$ متوازيان $\overrightarrow{اء}$ و $\overrightarrow{بحـ}$ متوازيان

$\overrightarrow{بحـ}$ ؛ $2\,\overrightarrow{حـب}$ لهما نفس المنحى ونفس الإتجاه .

$\overrightarrow{احـ}$ ؛ $3\,\overrightarrow{حـا}$ لهما نفس المنحى واتجاهان مختلفان

5 . ا ب حـ مثلث . أشطب ما هو خطأ :

$\overrightarrow{اب}$ ، $\overrightarrow{احـ}$ لهما نفس الإتجاه .

$\overrightarrow{بحـ}$ ، $3\,\overrightarrow{بحـ}$ لهما نفس الإتجاه .

$\overrightarrow{بحـ}$ ، $2\,\overrightarrow{حـب}$ لهما نفس الإتجاه .

$\overrightarrow{احـ}$ ، $-\overrightarrow{بحـ}$ لهما نفس الاتجاه .

$\overrightarrow{اب}$ ، $\sqrt{2}\,\overrightarrow{اب}$ لهما نفس الإتجاه .

$\overrightarrow{حـا}$ ، $\frac{3}{2}\,\overrightarrow{حـا}$ لهما نفس الإتجاه .

6 . وحدة الطول هي السنتيمتر .

$\overleftarrow{هـ}$ شعاع ممثله (ا ، ب) بحيث : $\|\overleftarrow{اب}\| = 2$

أرسم ممثلا مبدأه ا لكل من الأشعة التالية :

$\overleftarrow{و}$ بحيث $\overleftarrow{و} = 2\overleftarrow{هـ}$

$\overleftarrow{ى}$ بحيث $\|\overleftarrow{ى}\| = \|3\overleftarrow{هـ}\|$ ، $\overleftarrow{ى} \neq 3\overleftarrow{هـ}$.

$\overleftarrow{ل}$ بحيث $\|\overleftarrow{ل}\| = \|-2\overleftarrow{هـ}\|$ ، $\overleftarrow{ل} \neq -2\overleftarrow{هـ}$

$\overleftarrow{ق}$ بحيث $\|\overleftarrow{ق}\| = \|\overleftarrow{هـ}\|$ ، $\overleftarrow{ق} \neq \overleftarrow{هـ}$.

7 . وحدة الطول هي السنتيمتر . س عدد حقيقي غير معدوم .

1) هل الشعاعان $\overleftarrow{هـ}$ و $\overleftarrow{و}$ بحيث $\|\overleftarrow{هـ}\| = \|س . \overleftarrow{و}\|$ هما دوماً شعاعان متوازيان ؟

2) هل ان شعاعين متوازيين $\overleftarrow{هـ}$ و $\overleftarrow{و}$ لهما دوماً نفس الاتجاه .

8. وحدة الطول هي السنتيمتر .

ا ، ب ، حـ ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة بحيث :

$\|\overleftarrow{اب}\| = 3 \qquad \|\overleftarrow{احـ}\| = 2$

1) علّم نقطتين ى ، هـ بحيث $\overleftarrow{اى} = -\overleftarrow{اب}$ ؛ $\overleftarrow{اهـ} = -\overleftarrow{احـ}$

2) أوجد $\|\overleftarrow{احـ}\|$ ؛ $\|\overleftarrow{اهـ}\|$. هل $\overleftarrow{اى}$ ؛ $\overleftarrow{اب}$ متوازيان ؟

3) ما هو نوع الرباعي ب حـ ى هـ ؟

9 . وحدة الطول هي السنتيمتر .

ارسم مثلثاً ا ب حـ متقايس الساقين وقائم في ا .

1) علّم نقطتين م ، ن بحيث $\overleftarrow{ان} = 3\overleftarrow{اب}$ ، $\overleftarrow{ام} = 3\overleftarrow{احـ}$.

ما نوع المثلث ا ن م ؟

2) علّم نقطتين هـ ، و بحيث $\overleftarrow{اهـ} = -\overleftarrow{اب}$ ، $\overleftarrow{او} = -\overleftarrow{احـ}$

ما نوع المثلث ا هـ و ؟

10. وحدة الطول هي السنتيمتر .

ارسم متوازي أضلاع ا ب حـ ى .

هـ نقطة تقاطع المستقيمين (ا حـ) ، (ب ى) .

1) علّم النقط $و_1$ ، $و_2$ ، $و_3$ ، $و_4$ بحيث :

$\overleftarrow{هـو_1} = -2\overleftarrow{هـا}$ ؛ $\overleftarrow{هـو_2} = 2\overleftarrow{هـب}$ ؛ $\overleftarrow{هـو_3} = 2\overleftarrow{هـحـ}$ ، $\overleftarrow{هـو_4} = -2\overleftarrow{هـى}$

2) ما نوع الرباعي $و_1 و_2 و_3 و_4$ ؟

11. $\overleftarrow{هـ}$ ، $\overleftarrow{و}$ شعاعان بحيث :

$$2 (\overleftarrow{هـ} - 3 \overleftarrow{و}) + 3 (\overleftarrow{هـ} + \overleftarrow{و}) + 4 (\overleftarrow{هـ} - \overleftarrow{و}) = \overleftarrow{0}$$

بين أن الشعاعين $\overleftarrow{هـ}$ ، $\overleftarrow{و}$ متعاكسان .

12. $\overleftarrow{هـ}$ ، $\overleftarrow{و}$ شعاعان غير معدومين م ، ن عددان حقيقيان بحيث :

$$(م \overleftarrow{و} + 2 \overleftarrow{هـ}) + (ن \overleftarrow{و} - \overleftarrow{هـ}) + (- \overleftarrow{و} - \overleftarrow{هـ}) = \overleftarrow{0}$$

بين أن : $م = 1 - ن$

13. $\overleftarrow{هـ}$ ، $\overleftarrow{و}$ شعاعان . بين أن الشعاعين :

$$[(2 \overleftarrow{هـ} + \overleftarrow{و}) + (3 \overleftarrow{و} - \overleftarrow{هـ})] \text{ و } [(\overleftarrow{و} - 2 \overleftarrow{هـ}) + (\overleftarrow{هـ} - 5 \overleftarrow{و})]$$

متعاكسان

14. وحدة الطول هي السنتيمتر .

(ا ، ب) ممثل الشعاع $\overleftarrow{هـ}$ بحيث : $|| \overleftarrow{هـ} || = 1$

1) أرسم ممثلا لكل من الأشعة التالية :

$$\frac{1}{3} \overleftarrow{اب} \text{ ؛ } 2 (\frac{1}{3} \overleftarrow{اب}) \text{ ؛ } 4 (\frac{1}{3} \overleftarrow{اب}) \text{ ؛ } - \frac{2}{3} \overleftarrow{اب} \text{ ؛ } (2 + \frac{1}{3}) \overleftarrow{اب}$$

$$\frac{1}{4} \overleftarrow{اب} \text{ ؛ } \frac{3}{4} \overleftarrow{اب} \text{ ؛ } - \frac{3}{4} \overleftarrow{اب} \text{ ؛ } (1 + \frac{1}{4}) \overleftarrow{اب} .$$

2) أحسب : $|| \frac{1}{3} \overleftarrow{اب} ||$ ؛ $|| - \frac{2}{3} \overleftarrow{اب} ||$ ؛ $|| - \frac{3}{4} \overleftarrow{اب} ||$ ؛ $|| (- \frac{1}{4} + 1) \overleftarrow{اب} ||$

15. وحدة الطول هي السنتيمتر .

$\overleftarrow{هـ}$ ، $\overleftarrow{و}$ شعاعان بحيث : $\overleftarrow{هـ} = - 2 \overleftarrow{و}$ ، $|| \overleftarrow{هـ} || = 4$.

1) أرسم (ا ، ب) ، (ا ، د) ممثلي الشعاعين $\overleftarrow{ل}$ ، $\overleftarrow{ق}$ بحيث :

$\overleftarrow{ل} = 4 \overleftarrow{هـ}$ ، $\overleftarrow{ق} = 3 \overleftarrow{و}$.

2) ضع مكان النقط في كل حالة العدد الحقيقي المناسب :

$\overleftarrow{و} = \ldots \overleftarrow{هـ}$ ؛ $\overleftarrow{ل} = \ldots \overleftarrow{و}$ ؛ $\overleftarrow{ق} = \ldots \overleftarrow{هـ}$ ؛ $\overleftarrow{ق} = \ldots \overleftarrow{ل}$ ؛ $\overleftarrow{ق} + \overleftarrow{ل} = \ldots \overleftarrow{هـ}$

3) أحسب : $|| \overleftarrow{ل} ||$ ؛ $|| \overleftarrow{ق} ||$ ؛ $|| \overleftarrow{ل + ق} ||$.

16. ا ، ب ، ح ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة .

1) علِّم النقطتين م ، ه بحيث $\overleftarrow{\text{ام}} = \frac{3}{2}\overleftarrow{\text{اب}}$ ، $\overleftarrow{\text{اه}} = \frac{3}{2}\overleftarrow{\text{اح}}$.

2) بين أن : $\overleftarrow{\text{اه}} - \overleftarrow{\text{ام}} = \overleftarrow{\text{مه}}$

3) بين وجود عدد حقيقي س بحيث $\overleftarrow{\text{مه}} = \text{س}\,\overleftarrow{\text{بح}}$

4) بين أن المستقيمين (م ه) ، (ب ح) متوازيان .

17. وحدة الطول هي السنتيمتر .

ا ب ح مثلث متقايس الأضلاع بحيث $\|\overleftarrow{\text{اب}}\| = 3$.

1) علِّم نقطتين م ، ه بحيث : $\overleftarrow{\text{بم}} = \frac{5}{2}\overleftarrow{\text{با}}$ ، $\overleftarrow{\text{به}} = \frac{5}{2}\overleftarrow{\text{بح}}$

2) بين أنه يوجد عدد حقيقي س بحيث : $\overleftarrow{\text{مه}} = \text{س}\,\overleftarrow{\text{اح}}$

3) أحسب $\|\overleftarrow{\text{به}}\|$ ، $\|\overleftarrow{\text{بم}}\|$ ، $\|\overleftarrow{\text{مه}}\|$.

4) ما نوع المثلث ا م ه ؟

18. ا ، ب ، ح ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة . ه ، و ، ى ثلاثة أشعة بحيث :

$\overleftarrow{\text{ه}} = \overleftarrow{\text{اب}} - 2\overleftarrow{\text{اح}}$ ، $\overleftarrow{\text{و}} = \frac{3}{2}\overleftarrow{\text{اب}} + \overleftarrow{\text{اح}}$ ، $\overleftarrow{\text{ى}} = 4\overleftarrow{\text{اب}} - \frac{3}{4}\overleftarrow{\text{اح}}$.

باستعمال الشعاعين $\overleftarrow{\text{اب}}$ و $\overleftarrow{\text{اح}}$ أحسب كلا من الأشعة التالية :

$\overleftarrow{\text{ه}} + \overleftarrow{\text{و}}$ ، $-2\overleftarrow{\text{ه}} + \overleftarrow{\text{ى}}$ ، $\overleftarrow{\text{ه}} + \overleftarrow{\text{و}} + \overleftarrow{\text{ى}}$ ، $-\frac{2}{3}\overleftarrow{\text{ه}} + 2\overleftarrow{\text{و}} + \overleftarrow{\text{ى}}$.

19. ا ، ب ، ح ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة ، $\overleftarrow{\text{ه}}$ ، $\overleftarrow{\text{و}}$ ، $\overleftarrow{\text{ى}}$ ثلاثة أشعة بحيث :

$\overleftarrow{\text{ه}} = -\overleftarrow{\text{اب}} + \overleftarrow{\text{اح}}$ ، $\overleftarrow{\text{و}} = \frac{1}{2}\overleftarrow{\text{اب}} - \frac{3}{4}\overleftarrow{\text{اح}}$ ، $\overleftarrow{\text{ى}} = \sqrt{2}\,\overleftarrow{\text{اب}} - \frac{\sqrt{2}}{2}\overleftarrow{\text{اح}}$.

1) عبر بواسطة $\overleftarrow{\text{اب}}$ ، $\overleftarrow{\text{اح}}$ عن الأشعة التالية :

$\overleftarrow{\text{ه}} + \overleftarrow{\text{و}}$ ، $\overleftarrow{\text{ه}} + \overleftarrow{\text{و}} + \overleftarrow{\text{ى}}$ ، $-2(\overleftarrow{\text{ه}} + \overleftarrow{\text{و}})$ ، $\overleftarrow{\text{ه}} + \overleftarrow{\text{و}} + \sqrt{2}\,\overleftarrow{\text{ى}}$ ، $\sqrt{2}(\overleftarrow{\text{ه}} + \overleftarrow{\text{و}})$

2) بين أن كلا من الأشعة الواردة في السؤال السابق يوازي الشعاع $-2(\overleftarrow{\text{ه}} + \overleftarrow{\text{و}})$.

20. ا ، ب ، حـ ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة .

$\overleftarrow{\text{هـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{و}}$ ، $\overleftarrow{\text{ى}}$ ثلاثة أشعة بحيث :

$$\overleftarrow{\text{هـ}} = -\overleftarrow{\text{اب}} + 2\,\overleftarrow{\text{احـ}} \text{ ، } \overleftarrow{\text{و}} = -\overleftarrow{\text{اب}} - \frac{7}{2}\,\overleftarrow{\text{احـ}} \text{ ، } \overleftarrow{\text{ى}} = 2\,\overleftarrow{\text{اب}} + \frac{3}{2}\,\overleftarrow{\text{احـ}} .$$

1) عبر بدلالة $\overleftarrow{\text{اب}}$ ، $\overleftarrow{\text{احـ}}$ عن الأشعة التالية :

$2\,\overleftarrow{\text{هـ}} + \overleftarrow{\text{و}}$ ، $\overleftarrow{\text{هـ}} - \overleftarrow{\text{و}}$ ، $2\,(\overleftarrow{\text{هـ}} + \overleftarrow{\text{و}}) + \overleftarrow{\text{ى}}$.

2) بين أن الشعاعين $(\overleftarrow{\text{هـ}} + \overleftarrow{\text{و}})$ و $\overleftarrow{\text{ى}}$ متعاكسان .

21. اب حـ مثلث . س عدد حقيقي .

م نقطة بحيث : $\overleftarrow{\text{ام}} = \frac{2}{3}\,\overleftarrow{\text{اب}}$ ، ه نقطة بحيث : $6\,\overleftarrow{\text{هب}} - \overleftarrow{\text{هحـ}} = 0$

1) عبر عن $\overleftarrow{\text{اب}}$ بواسطة $\overleftarrow{\text{اب}}$ و $\overleftarrow{\text{احـ}}$.

عبر عن $\overleftarrow{\text{مه}}$ بواسطة $\overleftarrow{\text{اب}}$ و $\overleftarrow{\text{احـ}}$.

2) ك نقطة من المستقيم (احـ) بحيث : $\overleftarrow{\text{اك}} = \text{س} \,.\, \overleftarrow{\text{احـ}}$

عبر عن $\overleftarrow{\text{مك}}$ بواسطة $\overleftarrow{\text{اب}}$ ، $\overleftarrow{\text{احـ}}$ ، س .

3) عين العدد الحقيقي س حتى تكون النقط ه ، م ، ك على استقامة واحدة .

22. ا ، ب ، حـ ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة .

1) عين النقطة م بحيث $\overleftarrow{\text{ام}} = \frac{1}{2}\,\overleftarrow{\text{اب}} + \frac{1}{2}\,\overleftarrow{\text{احـ}}$

2) عبر عن كل من الشعاعين $\overleftarrow{\text{بم}}$ ، $\overleftarrow{\text{بحـ}}$ بواسطة $\overleftarrow{\text{اب}}$ ، $\overleftarrow{\text{احـ}}$.

3) بين أن م منتصف القطعة المستقيمة [ب حـ] .

23. اب حـ مثلث . ل ، م ، ه ثلاث نقط بحيث :

$$\overleftarrow{\text{ال}} = \frac{3}{5}\,\overleftarrow{\text{اب}} \text{ ، } \overleftarrow{\text{حـم}} = \frac{2}{3}\,\overleftarrow{\text{حـا}} \text{ ، } \overleftarrow{\text{به}} = -\frac{1}{2}\,\overleftarrow{\text{بحـ}}$$

1) عبر عن كل من الأشعة $\overleftarrow{\text{بحـ}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـه}}$ ، $\overleftarrow{\text{اه}}$ ، $\overleftarrow{\text{ام}}$ بواسطة الشعاعين $\overleftarrow{\text{ى}}$ ، $\overleftarrow{\text{و}}$ اللذين ممثلاهما على الترتيب (ا ، ب) ، (ا ، حـ)

2) عبر عن $\overleftarrow{\text{لم}}$ ، $\overleftarrow{\text{له}}$ بواسطة $\overleftarrow{\text{ى}}$ ، $\overleftarrow{\text{و}}$.

3) بين أن النقط ل ، م ، ه على استقامة واحدة .

24. ا ، ب ، حـ ، ء أربع نقط بحيث لا تكون أية ثلاثة منها على استقامة واحدة .

هـ منتصف [اب] ، ك منتصف [حـ ء] .

1) بين أن : $\overrightarrow{\text{هـحـ}} + \overrightarrow{\text{هـء}} - \overrightarrow{\text{هـا}} - \overrightarrow{\text{هـب}} = 2\,\overrightarrow{\text{هـك}}$

2) بين أن : $\overrightarrow{\text{احـ}} + \overrightarrow{\text{بء}} = 2\,\overrightarrow{\text{هـك}}$ ؛ $\overrightarrow{\text{اء}} + \overrightarrow{\text{بحـ}} = 2\,\overrightarrow{\text{هـك}}$.

25. ا ، ب ، حـ ثلاث نقط بحيث : $2\,\overrightarrow{\text{حـا}} + 3\,\overrightarrow{\text{حـب}} = \overrightarrow{0}$ ؛ $\overrightarrow{\text{حـب}} \neq \overrightarrow{0}$

بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد س بحيث :

$(1 + \sqrt{2})\,\overrightarrow{\text{حـا}} + (2\text{س} - 1)\,\overrightarrow{\text{حـب}} = \overrightarrow{0}$

26. و ، ا ، ب ثلاث نقط بحيث : $3\,\overrightarrow{\text{وا}} - 2\,\overrightarrow{\text{وب}} = \overrightarrow{0}$ ، $\overrightarrow{\text{وب}} \neq \overrightarrow{0}$

$\overrightarrow{\text{هـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ك}}$ شعاعان بحيث : $\overrightarrow{\text{هـ}} = \overrightarrow{\text{وا}} + 2\,\overrightarrow{\text{وب}}$ ، $\overrightarrow{\text{ك}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{وا}} - \overrightarrow{\text{وب}}$

بين أن $\overrightarrow{\text{هـ}}$ ، $4\,\overrightarrow{\text{ك}}$ متعاكسان

بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد س بحيث :

$(\text{س} + 2)\,\overrightarrow{\text{هـ}} + 8\,\overrightarrow{\text{ك}} = \overrightarrow{0}$

27. س عدد حقيقي . $\overrightarrow{\text{و}}$ ، $\overrightarrow{\text{هـ}}$ شعاعان بحيث : $\overrightarrow{\text{و}} + 2\,\overrightarrow{\text{هـ}} = \overrightarrow{0}$ ، $\overrightarrow{\text{هـ}} \neq \overrightarrow{0}$

$\overrightarrow{\text{و}} + 2\,\overrightarrow{\text{هـ}} = \overrightarrow{0}$ ، $\overrightarrow{\text{هـ}} \neq \overrightarrow{0}$

$\overrightarrow{\text{ء}}$ ، $\overrightarrow{\text{ل}}$ شعاعان بحيث :

$\overrightarrow{\text{ء}} = \sqrt{3}\,(\overrightarrow{\text{و}} + \overrightarrow{\text{هـ}}) + 5\,(\overrightarrow{\text{و}} - \overrightarrow{\text{هـ}})$

$\overrightarrow{\text{ل}} = (1 + \text{س})(2\overrightarrow{\text{و}} - \overrightarrow{\text{هـ}}) + (1 - \text{س})(\overrightarrow{\text{و}} - 2\,\overrightarrow{\text{هـ}})$

1) عبر عن $\overrightarrow{\text{ء}}$ ، $\overrightarrow{\text{ل}}$ بدلالة $\overrightarrow{\text{و}}$ فقط.

2) عين العدد الحقيقي س بحيث $\overrightarrow{\text{ء}} = 2\,\overrightarrow{\text{ل}}$.

28. م عدد حقيقي $\overrightarrow{\text{و}}$ ، $\overrightarrow{\text{هـ}}$ شعاعان بحيث : $\overrightarrow{\text{و}} + \frac{3}{2}\overrightarrow{\text{هـ}} = \overrightarrow{0}$ ، $\overrightarrow{\text{و}} \neq \overrightarrow{0}$

$\overrightarrow{\text{ف}}$ ، $\overrightarrow{\text{ل}}$ ، $\overrightarrow{\text{ك}}$ أشعة بحيث :

$\overrightarrow{\text{ف}} = 2\,\overrightarrow{\text{ل}} - \overrightarrow{\text{ك}} + 3\,(\overrightarrow{\text{ل}} + \overrightarrow{\text{ك}}) - 2\,(\overrightarrow{\text{ل}} - \overrightarrow{\text{ك}})$.

$\overrightarrow{\text{ل}} = \text{م}\,\overrightarrow{\text{و}} + \overrightarrow{\text{ك}} + 3\,(\overrightarrow{\text{و}} - 2\,\overrightarrow{\text{ك}}) + 3\,(\overrightarrow{\text{و}} - 2\,\text{م}\,\overrightarrow{\text{ك}})$.

$\overrightarrow{\text{ك}} = (2\,\overrightarrow{\text{و}} + 3\,\overrightarrow{\text{هـ}}) + (\overrightarrow{\text{و}} - \overrightarrow{\text{هـ}})$

1) عبر عن $\overrightarrow{\text{ف}}$ ، $\overrightarrow{\text{ل}}$ ، $\overrightarrow{\text{ك}}$ بدلالة $\overrightarrow{\text{و}}$ فقط

2) عين العدد الحقيقي م بحيث $\overrightarrow{\text{ف}} + \overrightarrow{\text{ك}} + \overrightarrow{\text{ل}} = \overrightarrow{0}$

29. (ا ، ب) ممثل شعاع $\overleftarrow{و}$ غير معدوم .

م هي مجموعة أشعة المستوي التي توازي $\overleftarrow{اب}$.

1) هل يمكن إيجاد عدد حقيقي ك بحيث $\overleftarrow{اب} =$ ك . $\overleftarrow{اب}$ ؟

هل يمكن إيجاد عدد حقيقي كَ بحيث $\overleftarrow{0} =$ كَ . $\overleftarrow{اب}$ ؟

هل $\overleftarrow{اب}$ ، $\overleftarrow{0}$ عنصران من المجموعة م ؟

2) $\overleftarrow{هـ}$ ، $\overleftarrow{ل}$ عنصران من م .

أرسم ممثلا مبدأه ا لكل من $\overleftarrow{هـ}$ ، $\overleftarrow{ل}$ ، $\overleftarrow{هـ} + \overleftarrow{ل}$

3) س ، ص عددان حقيقيان بحيث $\overleftarrow{هـ} =$ س $\overleftarrow{اب}$ ، $\overleftarrow{ل} =$ ص $\overleftarrow{اب}$.

بين أنه يوجد عدد حقيقي ع بحيث $\overleftarrow{هـ} + \overleftarrow{ل} =$ ع . $\overleftarrow{اب}$.

هل $\overleftarrow{هـ} + \overleftarrow{ل}$ عنصر من المجموعة م ؟

4) بين أن $- \overleftarrow{هـ}$ هو عنصر من م .

5) بين أن الأشعة $\overleftarrow{هـ} + \overleftarrow{ل}$ ، $3\,\overleftarrow{هـ} + \overleftarrow{ل}$ ، $-2\,\overleftarrow{هـ}$ ،

$\overleftarrow{هـ} - \overleftarrow{ل}$ ، $5\,\overleftarrow{هـ} - \frac{4}{3}\overleftarrow{ل}$ هي عناصر من م .

30. $\overleftarrow{هـ}$ شعاع غير معـدوم .

م مجموعة أشعة المستوي التي توازي $\overleftarrow{هـ}$.

1) أرسم ممثلين (م ، ن) ، (حـ ، د) لشعاعين $\overleftarrow{ن}$ ، $\overleftarrow{ل}$ بحيث :

$\overleftarrow{ن} \not\parallel \overleftarrow{ل}$ ؛ $\overleftarrow{ن} \notin$ م ؛ $\overleftarrow{ل} \notin$ م .

2) أرسم ممثلين (ا ، ب) ، (اَ ، بَ) للشعاعين $\overleftarrow{هـ}_1$ ، $\overleftarrow{هـ}_2$ بحيث :

$\overleftarrow{هـ}_1 \not\parallel \overleftarrow{هـ}_2$ ؛ $\overleftarrow{هـ}_1 \notin$ م ؛ $\overleftarrow{هـ}_2 \notin$ م ؛ $\overleftarrow{هـ}_1 + \overleftarrow{هـ}_2 \in$ م .

3) $\overleftarrow{و}$ شعاع بحيث $\overleftarrow{و} \notin$ م . بين أن $- \overleftarrow{و} \notin$ م .

4) $\overleftarrow{و}_1$ ، $\overleftarrow{و}_2$ شعاعان من المستوي .

بين أنه إذا كان $\overleftarrow{و}_1 + \overleftarrow{و}_2 \in$ م ؛ $\overleftarrow{و}_2 \in$ م فإن $\overleftarrow{و}_1 \in$ م .

31. ا ب حـ مثلث ، ى منتصف القطعة المستقيمة [ب حـ] .

م ، ن ، ك نقاط بحيث :

$\overleftarrow{ام} = 2\,\overleftarrow{اب}$ ، $\overleftarrow{ان} = 2\,\overleftarrow{احـ}$ ، $\overleftarrow{اك} = 2\,\overleftarrow{اى}$.

1) بين أن ك منتصف القطعة المستقيمة [م ن] .

2) بين أن نقطة تقاطع متوسطات المثلث ا م ن هي كذلك نقطة تقاطع متوسطات المثلث ب حـ ك .

32. م ب حـ مثلث ؛ ا نقطة بحيث : $\overrightarrow{حـ ا} = \frac{1}{3} \overrightarrow{حـ م}$.

ى منتصف القطعة المستقيمة [م ب] ؛ ك منتصف القطعة المستقيمة [ا ب] .

1) عبر عن الشعاع $\overrightarrow{ى ك}$ بدلالة الشعاع $\overrightarrow{ا م}$.

2) بين أن الثنائيين النقطتين (ا ، حـ) ، (ى ، ك) متسايرتين .

3) نرفق كل نقطة ط من المستوى بالشعاع $\overrightarrow{ڤ}$ حيث :

$\overrightarrow{ڤ} = \overrightarrow{ط ا} + \overrightarrow{ط ب} - 2 \overrightarrow{ط حـ}$

عبر عن $\overrightarrow{ڤ}$ بواسطة الشعاع $\overrightarrow{حـ ك}$ فقط .

عبر عن $\overrightarrow{ڤ}$ بواسطة الشعاع $\overrightarrow{ا ى}$ فقط .

33. ا ب حـ مثلث . نرفق كل نقطة م من المستوي بالشعاع $\overrightarrow{ڤ}$ بحيث :

$\overrightarrow{ڤ} = 3 \overrightarrow{م ا} - 2 \overrightarrow{م ب} - \overrightarrow{م حـ}$

1) عبر عن $\overrightarrow{ڤ}$ بواسطة $\overrightarrow{ا ب}$ و $\overrightarrow{ا حـ}$

2) بين أن الشعاع $\overrightarrow{ڤ}$ لا يرتبط باختيار النقطة م .

ارسم ممثل $\overrightarrow{ڤ}$ الذي مبدأه النقطة ا .

34. ا ب حـ مثلث . ك نقطة بحيث : $\overrightarrow{ا ك} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{ا ب} + \overrightarrow{ا حـ})$

اَ منتصف القطعة المستقيمة [ب حـ] .

1) بين أن $3 \overrightarrow{ا ك} = 2 \overrightarrow{ا اَ}$ أستنتج أن ك ∈ (ا اَ)

2) بين أن $\overrightarrow{ك م} + \overrightarrow{ك ب} + \overrightarrow{ك حـ} = \overrightarrow{0}$

أستنتج أن: $\overrightarrow{ب ك} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{ب ا} + \overrightarrow{ب حـ})$ ؛ $\overrightarrow{حـ ك} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{حـ ا} + \overrightarrow{حـ ب})$.

3) بين أنه من أجل نقطة م من المستوي فإن :

$\overrightarrow{م ا} + \overrightarrow{م ب} + \overrightarrow{م حـ} = \frac{1}{3} \overrightarrow{م ك}$

4) أكتب العلاقة السابقة في كل من الحالات التالية : م = ا ؛ م = ب ؛ م = حـ ؛
م = ك ؛ م = اَ

10	المستقيم المدرج المعلم على مستقيم

1 ـ المستقيم المدرج

1.1 المحور . القياس الجبري لشعاع :

• (ق) مستقيم، $\vec{و}$ شعاع غير معدوم منحاه هو منحنى المستقيم (ق) .

« شكل 1 »

(م ، ن) هو ممثل للشعاع $\vec{و}$ (شكل 1)

تقول إن $\vec{و}$ هو **شعاع التوجيه** للمستقيم (ق)

تقول إن الثنائية المرتبة (ق ، $\vec{و}$) **محور** .

يمثل الشكل 1 المحور (ق ، $\vec{و}$)

تقول إن (ق) **حامل** المحور (ق ، $\vec{و}$) وإن $\vec{و}$ **شعاع الواحدة** للمحور (ق ، $\vec{و}$)

تقول إن الاتجاه من م نحو **ن** هو **الاتجاه الموجب** للمحور (ق ، $\vec{و}$)

وإن الاتجاه من **ن** نحو م هو **الاتجاه السالب** للمحور (ق ، $\vec{و}$)

• أ و ب نقطتان من (ق)

لديك حالتان :

الحالة الأولى : أ = ب . الشعاع $\vec{أب}$ معدوم : $\vec{أب} = \vec{0}$

تعرف أن الشعاع $\vec{0}$ موازي للشعاع $\vec{و}$

لديك $\vec{0} = 0 \; \vec{و}$

الحالة الثانية : أ ≠ ب . الشعاع $\vec{أب}$ موازي للشعاع $\vec{و}$ (شكل 1)

تعرف أنه يوجد عدد حقيقي وحيد غير معدوم س بحيث : $\vec{أب} = س \, . \, \vec{و}$

يمكنك أن تقول في الحالتين انه يوجد عدد حقيقي س وحيد بحيث يكون :

$\vec{أب} = س \, . \, \vec{و}$

تقول إن هذا العدد الحقيقي س هو **القياس الجبري** للشعاع $\vec{أب}$ بالنسبة للشعاع $\vec{و}$

يرمز لهذا القياس الجبري بالرمز : $\overline{أب}$

يمكنك أن تكتب $\vec{أب} = \overline{أب} \, . \, \vec{و}$

أ) (ق ، $\overleftarrow{و}$) محور . أ ، ب نقطتان من (ق)

ما هو القياس الجبري للشعاع $\overleftarrow{أب}$ في كل من الحالات الآتية :

أ = ب ، $\overleftarrow{أب} = \overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{أب} = -\overleftarrow{و}$

ب) (ق ، $\overleftarrow{و}$) محور .

ما هو القياس الجبري بالنسبة للشعاع $\overleftarrow{و}$ لكل من الأشعة الآتية :

$2\overleftarrow{و}$ ، $-\frac{3}{4}\overleftarrow{و}$ ، $2\overleftarrow{و}$ ، $-3{,}2\overleftarrow{و}$

2.1 ـ علاقة شال :

(ق ، $\overleftarrow{و}$) محور .

- أ ، ب ، ج ثلاث نقط كيفية من المستقيم (ق) (شكل 2)

« شكل 2 »

يمكنك أن تكتب :

$\overleftarrow{أب} = \overline{أب}.\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{بج} = \overline{بج}.\overleftarrow{و}$ ، $\overleftarrow{أج} = \overline{أج}.\overleftarrow{و}$

تعرف أن : $\overleftarrow{أج} = \overleftarrow{أب} + \overleftarrow{بج}$

ومنه : $\overline{أج}.\overleftarrow{و} = \overline{أب}.\overleftarrow{و} + \overline{بج}.\overleftarrow{و}$

لكن : $\overline{أب}.\overleftarrow{و} + \overline{بج}.\overleftarrow{و} = (\overline{أب} + \overline{بج}).\overleftarrow{و}$

ومنه $\overline{أج}.\overleftarrow{و} = (\overline{أب} + \overline{بج}).\overleftarrow{و}$

ومنه : $[\overline{أج} - (\overline{أب} + \overline{بج})].\overleftarrow{و} = \overleftarrow{0}$

لكن $\overleftarrow{و} \neq \overleftarrow{0}$ ومنه $\overline{أج} - (\overline{أب} + \overline{بج}) = 0$.

ومنه $\overline{أج} = \overline{أب} + \overline{بج}$.

لقد برهنت النظرية الآتية :

نظـريـة :

> من أجل كل محور (ق ، $\overleftarrow{و}$) ومن أجل كل نقط ا ، ب ، ح من المستقيم (ق)
> $\overline{اح} = \overline{اب} + \overline{بح}$.

ان المساواة ، $\overline{اح} = \overline{اب} + \overline{بح}$ تسمى **علاقة شال**

- إذا كانت النقطتان ا و ح متطابقتين فإن علاقة شال تعطي :

$\overline{اا} = \overline{اب} + \overline{با}$.

لكن $\overleftarrow{اا} = \overleftarrow{0} = 0$. $\overleftarrow{و}$ ومنه : $\overline{اا} = 0$.

ومنـه $\overline{اب} + \overline{با} = 0$.

نستنتج أن العددين الحقيقيين $\overline{اب}$ و $\overline{با}$ متعاكسان.يمكنك ان تذكر ما يلي :

> من أجل كل محور (ق ، $\overleftarrow{و}$) ومن أجل كل نقطتين ا و ب من المستقيم (ق)
> فإن $\overline{اب} = - \overline{با}$.

ا) (ق ، $\overleftarrow{و}$) محور.ا ، ب ، ح ، ء أربعة نقط كيفية من القسم (ق)
بين أن $\overline{اء} = \overline{اب} + \overline{بح} + \overline{حء}$.

ب) (ق ، $\overleftarrow{و}$) محور ، ا ، ب ، ح ثلاثة نقط كيفية من المستقيم (ق)
بين أن : $\overline{اب} + \overline{بح} + \overline{جا} = 0$.

3.1 ـ المستقيم المـدرج :

(ق ، $\overleftarrow{و}$) محور (شكل 3)

علِّم نقطة م على المستقيم (ق)

« شـكل 3 »

سمّ ن نقطة من (ق) بحيث تكون الثنائية النقطية (م ، ن) ممثلا للشعاع $\overleftarrow{و}$ (شكل 3) .

نقول ان الثنائية المرتبة (م ، $\overrightarrow{\text{و}}$) هي **مَعلَمٌ** للمستقيم (ق) أو معلم على المستقيم (ق)
م هي **مبدأ** هذا المعلم ، $\overrightarrow{\text{و}}$ هو شعاع الواحدة لهذا المعلم .
نقول ايضاً ان المستقيم (ق) **مزود** بالمعلم (م ، $\overrightarrow{\text{و}}$) ،

- هـ نقطة كيفية من (ق) (شكل 3) .

ان الثنائية النقطية (م ، هـ) ممثل للشعاع $\overrightarrow{\text{م هـ}}$.
تعرف أنه يوجد عدد حقيقي وحيد سـ بحيث يكون : $\overrightarrow{\text{م هـ}} = \text{سـ} \ \overrightarrow{\text{و}}$.
تعرف أيضاً أن هذا العدد الحقيقي سـ هو القياس الجبري للشعاع $\overrightarrow{\text{م هـ}}$
بالنسبة إلى $\overrightarrow{\text{و}}$.
لديك : $\overrightarrow{\text{م هـ}} = \overline{\text{م هـ}} \ \overrightarrow{\text{و}}$.
يمكنك أن ترفق كل نقطة هـ من (ق) بالعدد الحقيقي الذي يساوي القياس
الجبري للشعاع $\overrightarrow{\text{م هـ}}$ بالنسبة إلى $\overrightarrow{\text{و}}$
تعرف هكذا تطبيقاً تا من المستقيم (ق) في ح .
لديك : تا : (ق) ⟵ ح
هـ ⟼ $\overline{\text{م هـ}}$
لنبين ان تا تقابل
هذا يعني أنه يجب ان تبين ان كل عدد حقيقي سـ صورة لنقطة واحدة هـ
وواحدة فقط من (ق) بواسطة تا .
هذا يعني أنه يجب ان نبين أنه :
من أجل كل عدد حقيقي سـ توجد نقطة هـ واحدة وواحدة فقط من (ق)
بحيث : $\overline{\text{م هـ}} = \text{سـ}$
تعرف أن الشعاع سـ $\overrightarrow{\text{و}}$ يوازي الشعاع $\overrightarrow{\text{و}}$ و أن سـ هو قياسه الجبري بالنسبة إلى $\overrightarrow{\text{و}}$.
توجد نقطة هـ من (ق) بحيث يكون (م ، هـ) ممثلا للشعاع سـ $\overrightarrow{\text{و}}$
يمكنك أن تكتب : $\overrightarrow{\text{م هـ}} = \text{سـ} . \overrightarrow{\text{و}}$
هذه النقطة هـ هي حل للمسألة المطروحة . هل هي الحل الوحيد ؟
إذا كان هناك حل آخر هَ يكون لديك : $\overrightarrow{\text{م هَ}} = \text{سـ} . \overrightarrow{\text{و}}$
تستنتج عندئذ أن : $\overrightarrow{\text{م هـ}} = \overrightarrow{\text{م هَ}}$.
تستنتج عندئذ أن : (م ، هـ) $\sim$ (م ، هَ)

تعرف أنه إذا كان (م ، هـ) ~ (م ، هَ) فإن (م ، م) ~ (هـ ، هَ)
تستنتج أن الثنائية النقطية (هـ ، هَ) معدومة وأن هـ = هَ
لا يمكن إذا للنقطة هَ أن تكون مختلفة عن النقطة هـ
ان النقطة هـ المبحوث عنها وحيدة .
تستنتج أن التطبيق تـا تقابل .

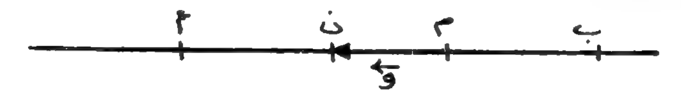
تقول إن التقابل تا **يزود** المستقيم (ق) **بتدريج مَعْلَمُهُ** (م ، $\vec{و}$)
تقول إن العدد الحقيقي سـ الذي هو صورة نقطة وحيدة هـ من (ق) **فاصلة** النقطة هـ في المعلم (م ، $\vec{و}$) أو بالنسبة للمعلم (م ، $\vec{و}$)
تكتب : هـ (سـ) ، تقرأ : النقطة هـ ذات الفاصلة سـ .
تذكر أن التقابل تا معين بالنقطة م وبالشعاع $\vec{و}$.
تستنتج أن تدريجا للمستقيم (ق) يكون معينا بمعرفة معلم (م ، $\vec{و}$) من (ق)
تقول إن المستقيم (ق) **مستقيم مدرج**
يمثل الشكل 3 **المستقيم المدرج** (ق) المزود بالمعلم (م ، $\vec{و}$)

- تلاحظ أن : $\overrightarrow{مم} = \vec{0}$. $\vec{و}$ و $\overrightarrow{من} = 1$. $\vec{و}$

تستنتج أن : فاصلة النقطة م هي العدد الحقيقي صفر
فاصلة النقطة ن هي العدد الحقيقي 1

4.1 ـ القياس الجبري لشعاع على مستقيم مدرج :

أ و ب نقطتان من مستقيم مدرج فاصلتاهما على الترتيب سـ و ع (شكل 4)



« شكل 4 »

تمكنك علاقة شال من الكتابة :
$\overline{مب} = \overline{مأ} + \overline{أب}$ ومنه ع = سـ + $\overline{أب}$ ومنه $\overline{أب}$ = ع − سـ
يمكنك أن تستخلص أن :
القياس الجبري للشعاع $\overline{أب}$ يساوي الفرق ع − سـ .

أ) (ق) مستقيم مدرج ذو معلم (م ، $\vec{و}$)

علِّم على (ق) النقط التي فواصلها على الترتيب :

$-\frac{3}{2}$ ، $\frac{8}{3}$ ، $-5,2$ ، $\frac{5}{4}$ ، $-\frac{4}{7}$

ب) (ق) مستقيم مدرج ذو معلم (م ، $\vec{و}$) .

أ ، ب ، ح هي النقط من (ق) التي فواصلها على الترتيب :

$\frac{5}{3}$ ، $-6,25$ ، $\frac{4}{5}$.

احسب $\overline{أب}$ ، $\overline{بح}$ ، $\overline{أح}$ ، $\overline{بأ}$.

ح) (ق) مستقيم مدرج ذو معلم (م ، $\vec{و}$) .

علِّم نقطتين أ و ب على (ق) بحيث : $\overline{أب} = -\frac{3}{2}$.

علِّم على (ق) نقطتين أخريين ح ، ى بحيث : $\overline{حى} = 2,$

5.1 ـ المسافة بين نقطتين من مستقيم مدرج :

(ق) مستقيم مدرج ذو معلم (م ، $\vec{و}$)

أ ، ب نقطتان من مستقيم (ق) فاصلتاهما على الترتيب $س_1$ و $س_2$.

نقول إن :

المسافة بين النقطتين أ و ب **هي** العدد الحقيقي $|س_2 - س_1|$.

يرمز لهذه المسافة بالرمز م (أ ، ب) أو بالرمز أب

لديك م (أ ، ب) = أب = $|س_2 - س_1|$

تلاحظ أن : $|س_2 - س_1| = |\overline{أب}|$ و $|س_2 - س_1| = ||\overrightarrow{أب}||$

أ) (ق) مستقيم مدرج ذو معلم (م ، $\vec{و}$)

أ ، ب ، ح ثلاث نقط من (ق) فواصلها على الترتيب س ، ع ، ص .

م (أ ، ب) هي المسافة بين النقطتين أ و ب .

بين أن : م (ا ، ب) = 0 إذا وفقط إذا كان ا = ب .

م (أ ، ب) = م (ب ، أ)

م (أ ، ب) ⩽ م (أ ، حـ) + م (حـ ، ب)

ب) (ق) مستقيم مدرج ذو معلم (م ، $\vec{و}$) . ا ، ب ، حـ ثلاث نقط من (ق)

فواصلها على الترتيب : – 3 ؛ 5 ؛ 6

تحقق من ان : م (ا ، حـ) ⩽ م (ا ، ب) + م (ب ، حـ) ؛

م (ب ، حـ) ⩽ م (ب ، أ) + م (ا ، حـ)

6.1 ـ فاصلة منتصف قطعة مستقيمة .

(ق) مستقيم مدرج ذو معلم (م ، $\vec{و}$)

أ و ب نقطتان من (ق) فاصلتاهما على الترتيب $س_1$ و $س_2$.

ل منتصف القطعة [ا ب] . سم س فاصلة ل

تعرف أن : $\overleftarrow{م ا} = \overleftarrow{م ل} + \overleftarrow{ل ا}$ ، $\overleftarrow{م ب} = \overleftarrow{م ل} + \overleftarrow{ل ب}$

ومنه : $\overleftarrow{م ا} + \overleftarrow{م ب} = 2\,\overleftarrow{م ل} + \overleftarrow{ل ا} + \overleftarrow{ل ب}$

لكن : $\overleftarrow{ل ا} + \overleftarrow{ل ب} = \vec{0}$ ومنه $\overleftarrow{م ا} + \overleftarrow{م ب} = 2\,\overleftarrow{م ل}$

لكن : $\overleftarrow{م ا} = س_1 . \vec{و}$ ، $\overleftarrow{م ب} = س_2 \vec{و}$ $\overleftarrow{م ل} = س . \vec{و}$

ومنه : $س_1 \vec{و} + س_2 \vec{و} = 2 (س . \vec{و})$

ومنه : $(س_1 + س_2) \vec{و} = (2 س) \vec{و}$

ومنه : $(س_1 + س_2 - 2 س) \vec{و} = \vec{0}$

لكن : $\vec{و} \neq \vec{0}$ ومنه $س_1 + س_2 - 2 س = 0$

تستنتج أن : $$س = \frac{س_1 + س_2}{2}$$

تلاحظ أنه : إذا كان ا = ب ، فان $س_1 = س_2$ و $س = س_1 = س_2$

في هذه الحالة يكون لديك : ل = ا = ب .

(ق) مستقيم مدرج ذو معلم (م ، و⃗)

ا) ا و ب نقطتان فاصلتاهما على الترتيب $س_1$ و $س_2$

أوجد فاصلة المنتصف ل للقطعة [ا ب] في كل من الحالتين الآتيتين :

$س_1 = -\frac{3}{2}$ و $س_2 = \frac{4}{5}$ ؛ $س_1 = -3$ و $س_2 = 5,2$

ب) هـ ، ن ، ك ثلاث نقط من (ق) فواصلها على الترتيب س ، ص ، ع

بحيث يكون : $س = \frac{4}{3}$ ، $ع = -7,5$.

أوجد الفاصلة ص للنقطة ن بحيث تكون ك منتصف القطعة [هـ ن]

2 ـ تغيير التدريج . مركز البعدين المتناسبين

1.2 ـ تغيير المعلم .

تعرف أن تدريج مستقيم (ق) معين بالمعلم المختار .

ان هذا التدريج مرتبط اذا بهذا المعلم .

تحصل على تدريج آخر للمستقيم (ق) إذا بدلت المعلم .

تعرف أن معلماً ما يكون معيناً بمبدئه وبشعاع الواحدة

تستنتج أن التدريج يتغيـر .

ـ اما لأن مبدأ المعلم تغير .

ـ اما لأن شعاع الواحدة تغير .

ـ اما لأن شعاع الواحدة والمبدأ تغيرا معا .

2.2 ـ تغيير المبدأ :

• (ق) مستقيم مدرج ذو معلم (م ، و⃗) بحيث (م ، ن) تمثل و⃗ (شكل 5)

« شـكل 5 »

مَ نقطة من (ق) فاصلتها ب بالنسبة الى المعلم (م ، و⃗) (شكل 5)

تعرف أنه من أجل كل نقطة هـ من (ق) : $\overline{م هـ} = \overline{م مَ} + \overline{مَ هـ}$

تعرف أن م هـ هي الفاصلة سـ للنقطة هـ بالنسبة الى المعلم (م ، و⃖)
وأن مَ هـ هي الفاصلة سَ للنقطة هـ بالنسبة (مَ ، و⃖) .
تستنتج أن : س = ب + سَ

- ل نقطة من (ق) فاصلتها ع بالنسبة للمعلم (م ، و⃖) ، وفاصلتها عَ بالنسبة إلى (مَ ، و⃖) . تعرف أنه في المعلم (م ، و⃖) : $\overline{\text{هـ ل}}$ = ع − س
لكن ع = ب + عَ و س = ب + سَ ومنه $\overline{\text{هـ ل}}$ = (ب + عَ) − (ب + سَ)
ومنه $\overline{\text{هـ ل}}$ = عَ − سَ ومنه ع − س = عَ − سَ
تستنتج أن : القياس الجبري للشعاع هـ ل⃖ مستقل عن مبدأ المعلم الذي يختار على المستقيم (ق) .

(ق) مستقيم مدرج ذو معلم (م ، و⃖)

ن ، ا ، ب نقط من المستقيم (ق) فواصلها على الترتيب 1 ، − 3 ، $\frac{5}{2}$

في المعلم (م ، و⃖) .

ا) ما هي فاصلة ب في المعلم (ا ، و⃖) ؟
ما هي فاصلة ا في المعلم (ب ، و⃖) ؟

ب) ما هي فاصلة ن في المعلم (ا ، و⃖) ؟
ما هي فاصلة ن في المعلم (ب ، و⃖) ؟

3.2 ـ تغيير شعاع الواحدة :

(ق) مستقيم مدرج ذو معلم (م ، و⃖) بحيث (م ، ن) ممثل و⃖ (شكل 6)



« شكل 6 »

نَ نقطة من (ق) مختلفة عن م وعن ن (شكل 6)
تمثل الثنائية النقطية (م ، نَ) الشعاع وَ⃖ الذي يختلف عن و⃖

ان الشعاعين $\overleftarrow{و}$ و $\overleftarrow{وَ}$ متوازيان

تستنتج أنه يوجد عدد حقيقي ا غير معدوم بحيث : $\overleftarrow{وَ} = ا . \overleftarrow{و}$

• هـ نقطة من (ق) فاصلتها س في المعلم (م ، $\overleftarrow{و}$) وفاصلتها سَ في المعلم (م ، $\overleftarrow{وَ}$)

لديك : $\overleftarrow{م ن} = س \overleftarrow{و}$ و $\overleftarrow{م ن} = سَ \overleftarrow{وَ}$

لكن : $\overleftarrow{وَ} = ا \overleftarrow{و}$ ومنه $\overleftarrow{م ن} = سَ (ا \overleftarrow{و})$

لكن : $سَ (ا \overleftarrow{و}) = (سَ ا) . \overleftarrow{و}$ ومنه $\overleftarrow{م ن} = (سَ ا) . \overleftarrow{و}$

تستنتج أن : $س \overleftarrow{و} = (سَ ا) . \overleftarrow{و}$

ومنه $س \overleftarrow{و} - (سَ ا) \overleftarrow{و} = \overleftarrow{0}$ ومنه $(س - سَ ا) \overleftarrow{و} = \overleftarrow{0}$

لكن $\overleftarrow{و} \neq \overleftarrow{0}$ ومنه $س = ا سَ$

• ل نقطة من (ق) ، فاصلتها ع في المعلم (م ، $\overleftarrow{و}$) وفاصلتها عَ في المعلم (م ، $\overleftarrow{وَ}$)

يكون لديك $ع = ا . عَ$

سمّ ك القياس الجبري للشعاع $\overleftarrow{هـ ل}$ في المعلم (م ، $\overleftarrow{و}$) و كَ قياسه الجبري في المعلم (م ، $\overleftarrow{وَ}$) .

تعرف أن : $ك = ع - س$ و $كَ = عَ - سَ$

لكن : $ع = ا عَ$ و $س = ا سَ$ ومنه $ك = ا عَ - ا سَ = ا (عَ - سَ)$

تستنتج أن : $كَ = \frac{ك}{ا}$.

لقد بينت أنه إذا كان : $\overleftarrow{وَ} = ا . \overleftarrow{و}$ فان : $كَ = \frac{ك}{ا}$

ا) (ق) مستقيم مدرج ذو معلم (م ، $\overleftarrow{و}$) ؛ (م ، ن) ممثل للشعاع $\overleftarrow{و}$

نَ نقطة من (ق) فاصلتها $-\frac{3}{2}$ في المعلم (م ، $\overleftarrow{و}$)

ما هي فاصلة النقطة ن في المعلم (م ، $\overleftarrow{م نَ}$) ؟

ب) (ق) مستقيم مدرج ذو معلم (م ، $\overleftarrow{و}$)

عين على (ق) النقط ا ، ب ، نَ التي فواصلها على الترتيب $-\frac{2}{3}$ ، 4 ، -2

في المعلم (م ، $\overleftarrow{و}$) .

ما هو القياس الجبري للشعاع $\overleftarrow{ا ب}$ في المعلم (م ، $\overleftarrow{و}$) ؟
ما هو القياس الجبري للشعاع $\overleftarrow{ا ب}$ في المعلم (م ، $\overleftarrow{م ن}$) ؟

4.2 ـ تغيير المبـدء وشعاع الوحـدة :

(ق) مستقيم مزود بمَعْلَمَيْن (م ، $\overleftarrow{و}$) و (مَ ، $\overleftarrow{وَ}$) (شكل 7)



« شـكل 7 »

سمّ ب فاصلة النقطة مَ في المعلم (م ، $\overleftarrow{و}$) $\overleftarrow{و}$ و $\overleftarrow{وَ}$ متوازيان

تستنتج أن : $\overleftarrow{وَ} = ا . \overleftarrow{و}$

هـ نقطة فاصلتها س في المعلم (م ، $\overleftarrow{و}$) وفاصلتها سَ في المعلم (مَ ، $\overleftarrow{وَ}$)

تعرف أن : $\overleftarrow{م هـ} = \overleftarrow{م مَ} + \overleftarrow{مَ هـ}$ ، $\overleftarrow{م هـ} =$ س $\overleftarrow{و}$ ؛ $\overleftarrow{مَ هـ} =$ سَ $\overleftarrow{وَ}$ و $\overleftarrow{م مَ} =$ ب $\overleftarrow{و}$

ومنه : س $\overleftarrow{و} =$ ب $\overleftarrow{و} +$ سَ $\overleftarrow{وَ}$

لكن $\overleftarrow{وَ} = ا \overleftarrow{و}$ ومنه : س $\overleftarrow{و} =$ ب $\overleftarrow{و} +$ سَ (ا $\overleftarrow{و}$) = ب $\overleftarrow{و}$ + (ا سَ) $\overleftarrow{و}$

ومنـه س $\overleftarrow{و}$ = (ب + ا سَ) $\overleftarrow{و}$ ومنه [س − (ب + ا سَ)] $\overleftarrow{و} = \overleftarrow{0}$

لكـن $\overleftarrow{و} \neq \overleftarrow{0}$ ومنه س − (ب + ا سَ) = 0

تستنتج أن : س = ب + ا سَ .

ا) (ق) مستقيم مدرج ذو معلم (م ، $\overleftarrow{و}$)

نَ نقطة فاصلتها − 2 في المعلم (م ، $\overleftarrow{و}$)

هـ نقطة فاصلتها − $\frac{5}{3}$ في المعلم (م ، $\overleftarrow{و}$)

ما هي فاصلـــة هـ في المعلم (نَ ، $\overleftarrow{نَ م}$) ؟

ب) (ق) مستقيم مزود بمعلمين (م ، $\overleftarrow{و}$) و (مَ ، $\overleftarrow{وَ}$)

هـ نقطة فاصلتها س في المعلم (م ، $\overleftarrow{و}$) ، وفاصلتها سَ في المعلم (مَ ، $\overleftarrow{وَ}$)

عين مَ و $\overleftarrow{وَ}$ علما بأن : س = 4 سَ − 5

5.2 ـ نسبة القياسين الجبريين لشعاعين :

(ق) مستقيم مزود بمعلمين (م ، $\overleftarrow{و}$) و (مَ ، $\overleftarrow{وَ}$) .

« شكل 8 »

هـ، ب ، حـ ، ى أربعة نقط من (ق) فواصلها على الترتيب س ، ع ، ص ، ى في المعلم (م ، $\overleftarrow{و}$) وفواصلها على الترتيب سَ ، عَ ، صَ ، ىَ في المعلم (مَ ، $\overleftarrow{وَ}$) $\overleftarrow{و}$ و $\overleftarrow{وَ}$ متوازيان ، تستنتج أن $\overleftarrow{وَ}$ = ا . $\overleftarrow{و}$.

سمّ ب فاصلة مَ في المعلم (م ، $\overleftarrow{و}$)

تعرف أن : س = ا سَ + ب ، ع = ا عَ + ب .

ص = ا صَ + ب ، ى = ا ىَ + ب .

ومنه : ع − س = ا (عَ − سَ) وى − ص = ا (ىَ − صَ)

ومنه : $\frac{\text{ع} - \text{س}}{\text{ى} - \text{ص}} = \frac{\text{ا}\,(\text{عَ} - \text{سَ})}{\text{ا}\,(\text{ىَ} - \text{صَ})} = \frac{\text{عَ} - \text{سَ}}{\text{ىَ} - \text{صَ}}$

ع − س و ى − ص هما القياسان الجبريان للشعاعين $\overleftarrow{\text{اب}}$ و $\overleftarrow{\text{حـ ى}}$ على الترتيب في المعلم (م ، $\overleftarrow{و}$) .

عَ − سَ و ىَ − صَ هما القياسان الجبريان لنفس الشعاعين على الترتيب في المعلم (مَ ، $\overleftarrow{وَ}$) .

نستنتج أن :

نسبة القياسين الجبريين للشعاعين $\overleftarrow{\text{اب}}$ و $\overleftarrow{\text{حـ ى}}$ مستقلة عن المعلم المختار .

ا) (ق) مستقيم مدرج ذو معلم (م ، $\overleftarrow{و}$)

مَ ، ا ، ب ، حـ نقط من (ق) فواصلها على الترتيب 3 ، − 2 ، 4 ، − 6

احسب النسبة $\frac{\overline{\text{حـ ا}}}{\overline{\text{حـ ب}}}$ في المعلم (م ، $\overleftarrow{و}$) .

احسب النسبة $\frac{\overline{\text{حـ ا}}}{\overline{\text{حـ ب}}}$ في المعلم (مَ ، $\overleftarrow{\text{مَ م}}$) .

6.2 ـ مركز البعدين المتناسبين لنقطتين . النقطة القاسمة لقطعة في نسبة معلومة :

(ق) مستقيم مدرج ذو معلم (م ، $\overleftarrow{و}$) (شكل 9)

« شكل 9 »

• **مسألة أولى** : ا و ب نقطتان من (ق) فاصلتاهما على الترتيب 4 و − 2

هل توجد نقطة هـ من المستقيم (ق) بحيث يكون :

$2\,\overleftarrow{هـ ا} + 3\,\overleftarrow{هـ ب} = \overleftarrow{0}$ ؟

من أجل كل نقطة هـ من (ق) فاصلتها س لديك :

$\overleftarrow{هـ ا} = \overline{هـ ا}\,.\,\overleftarrow{و} = (4 - س)\,\overleftarrow{و}$ و $\overleftarrow{هـ ب} = \overline{هـ ب}\,.\,\overleftarrow{و} = (-2 - س)\,\overleftarrow{و}$.

ومنه : $2\,\overleftarrow{هـ ا} = 2\,(4 - س)\,\overleftarrow{و}$ و $3\,\overleftarrow{هـ ب} = 3\,(-2 - س)\,.\,\overleftarrow{و}$

ومنه : $2\,\overleftarrow{هـ ا} + 3\,\overleftarrow{هـ ب} = 2\,(4 - س)\,\overleftarrow{و} + 3\,(-2 - س)\,\overleftarrow{و}$.

ومنه : $2\,\overleftarrow{هـ ا} + 3\,\overleftarrow{هـ ب} = (2 - 5\,س)\,\overleftarrow{و}$.

انك تبحث عن نقطة هـ من (ق) بحيث : $2\,\overleftarrow{هـ ا} + 3\,\overleftarrow{هـ ب} = \overleftarrow{0}$.

هذا يجعلك تبحث عن عدد حقيقي س بحيث : $(2 - 5\,س)\,\overleftarrow{و} = \overleftarrow{0}$.

لكن $\overleftarrow{و} \neq \overleftarrow{0}$ ، ومنه : $2 - 5\,س = 0$ ومنه $س = \frac{2}{5}$.

تستنتج أنه توجد نقطة هـ واحدة وواحدة فقط بحيث هي حل للمسألة المطروحة

فاصلة هذه النقطة هي $\frac{2}{5}$ (الشكل 9) .

تقول ان : النقطة هـ هي **مركز البعدين المتناسبين** للنقطتين

ا و ب **المرفقتين بالمعاملين** 2 و 3 على الترتيب .

تعرف أن النسبة $\frac{\overline{هـ ا}}{\overline{هـ ب}}$ مستقلة عن المعلم المختار على (ق) .

يمكن أن تطرح المسألة السابقة بالشكل الآتي :

ا و ب نقطتان من (ق) فاصلتاهما 4 و − 2

هل توجد نقطة هـ من المستقيم (ق) بحيث :

$\frac{\overline{هـ ا}}{\overline{هـ ب}} = -\frac{2}{3}$ ؟

من اجل كل نقطة هـ من (ق) فاصلتها س لديك

$\overline{\text{هـ أ}} = 4 - $ س و $\overline{\text{هـ ب}} = -2 - $ س .

ومنه $\dfrac{\overline{\text{هـ أ}}}{\overline{\text{هـ ب}}} = \dfrac{4 - \text{س}}{-2 - \text{س}}$.

ان البحث عن نقطة هـ تكون حلا للمسألة يعني اذا البحث عن عدد حقيقي س

بحيث : $\dfrac{4 - \text{س}}{-2 - \text{س}} = -\dfrac{3}{2}$

ومنه 2 (4 − س) = − 3 (− 2 − س) ومنه 5 س = 2 ومنه س = $\dfrac{2}{5}$

تستنتج من جديد ، أنه توجد نقطة هـ واحدة وواحدة فقط بحيث هي حل للمسألة المطروحة . إن هذه النقطة هي التي فاصلتها $\dfrac{2}{5}$.

تقول إن النقطة هـ **تقسم** القطعة [أ ب] في النسبة $-\dfrac{3}{2}$.

تذكر أن :

هـ مركز البعدين المتناسبين للنقطتين أ و ب المرفقتين بالمعاملين 2 و 3 على الترتيب

يعني هـ تقسم القطعة [أ ب] في النسبة $-\dfrac{3}{2}$.

- **المسألة الثانية** :

أ و ب نقطتان من (ق) فاصلتاهما على الترتيب − 2 و− 5 (شكل 10)

هل توجد نقطة هـ من (ق) بحيث : $\overleftarrow{\text{هـ أ}} + (-\overleftarrow{\text{هـ ب}}) = \overleftarrow{0}$

« شكل 10 »

من أجل كل نقطة هـ من (ق) فاصلتها س لديك :

$\overleftarrow{\text{هـ أ}} = (-2 - \text{س})\overleftarrow{\text{و}}$ و $\overleftarrow{\text{هـ ب}} = (5 - \text{س})\overleftarrow{\text{و}}$.

ومنه : $\overleftarrow{\text{هـ أ}} + (-\overleftarrow{\text{هـ ب}}) = (-2 - \text{س})\overleftarrow{\text{و}} + [-(5 - \text{س})\overleftarrow{\text{و}}]$.

ومنه : $\overleftarrow{هـ أ} + (-\overleftarrow{هـ ب}) = [-2 - س - (5 - س)]\overleftarrow{و}$

ومنه $\overleftarrow{هـ أ} + (-\overleftarrow{هـ ب}) = -7\overleftarrow{و}$

لا يمكن للشعاع $-7\overleftarrow{و}$ أن يكون معدوماً .

تستنتج أنه لا توجد أية نقطة هـ حل للمسألة المطروحة .

ليس لهذه المسألة إذاً حل .

• يمكنك أن تطرح المسألة السابقة بالكيفية الآتية :

أ و ب نقطتان من (ق) فاصلتاهما على الترتيب -2 ، 5 .

هل توجد نقطة هـ من (ق) بحيث : $\frac{\overline{هـ أ}}{\overline{هـ ب}} = 1$ ؟

باستعمال طريقة مماثلة لما سبق في المسألة الأولى تجد من جديد أن المسألة الثانية ليس لها حل .

• **المسألة الثالثة : الحالة العامة** :

أ و ب نقطتان من (ق) فاصلتاهما على الترتيب $س_1$ و $س_2$

ك و ن عددان حقيقيان

هل توجد نقطة هـ من (ق) بحيث . $ك \overleftarrow{هـ أ} + ن \overleftarrow{هـ ب} = \overleftarrow{0}$ ؟

تقبل انه :

إذا كان $ك + ن \neq 0$ فإنه توجد نقطة واحدة هـ من (ق) وواحدة فقط بحيث :

$ك \overleftarrow{هـ أ} + ن \overleftarrow{هـ ب} = \overleftarrow{0}$

إن فاصلة هذه النقطة هي $\frac{ك س_1 + ن س_2}{ك + ن}$

تقول إن هذه النقطة هي **مركز البعدين المتناسبين** للنقطتين أ و ب **المرفقتين بالمعاملين** ك و ن على الترتيب .

• يمكن ان تطرح المسألة السابقة على الكيفية التالية :

و ب نقطتان من (ق) فاصلتاهما على الترتيب $س_1$ و $س_2$. م عدد حقيقي .

هل توجد نقطة هـ من (ق) بحيث : $\frac{\overline{هـ أ}}{\overline{هـ ب}} = م$ ؟

تقبل انه :

إذا كان $ر \neq 1$ فإنه توجد نقطة واحدة هـ من (ق) وواحدة فقط بحيث:

$\frac{\overline{هـ أ}}{\overline{هـ ب}} = ر$.

إن فاصلة هذه النقطة هي $\frac{س_1 - ر س_2}{1 - ر}$

تقول ان هذه النقطة **تقسم** القطعة [أ ب] في النسبة ر .

- تقبل انه :

إذا كان العدد الحقيقي ك + ن غير معدوم وإذا كان ك غير معدوم فإن مركز البعدين المتناسبين للنقطتين أ و ب المرفقتين بالمعاملين ك و ن على الترتيب

هو النقطة التي تقسم القطعة [أ ب] في النسبة $-\frac{ن}{ك}$

(ق) مستقيم مدرج ذو معلم (م ، و) .

أ) أ و ب نقطتان من (ق) فاصلتاهما على الترتيب $-\frac{3}{2}$ ، $\frac{5}{4}$

أوجد فاصلة هـ مركز البعدين المتناسبين للنقطتين أ ، ب المرفقتين بالمعاملين -2 ، 5 على الترتيب

أوجد فاصلة هَ مركز البعدين المتناسبين للنقطتين أ ، ب المرفقتين بالمعاملين -2 ، -5 على الترتيب

ب) حـ ، ء نقطتان من (ق) فاصلتهما على الترتيب 2,5 و -2

أوجد فاصلة النقطة م من (ق) التي تقسم القطعة [حـ ء] في النسبة $\frac{3}{4}$.

أوجد فاصلة النقطة مَ من (ق) التي تقسم القطعة [حـ ء] في النسبة $-\frac{3}{4}$.

تمـــاريـن :

1 . (Δ ، و⃗) محور ، ما هي القياسات الجبرية بالنسبة إلى و⃗ ، لكل من الأشعة الآتية :

-5 و⃗ ؛ $\frac{4}{7}$ و⃗ ؛ $(\sqrt{3}+1)$ و⃗ ؛ $(3,2)$ و⃗ ؟

2 . وحدة الأطوال هي السنتيمتر ، (Δ ، و⃗) محور بحيث : ||و⃗|| = 3 .

م ، ن نقطتان من (Δ) بحيث تكون الثنائية النقطية (م ، ن) ممثلا للشعاع و⃗ .

علم على (Δ) النقاط : هـ$_1$ ؛ هـ$_2$ ؛ هـ$_3$ ؛ هـ$_4$ بحيث :

م هـ$_1$⃖ = $-\frac{2}{5}$ و⃗ ؛ م هـ$_2$⃖ = $-\frac{1}{2}$ و⃗ ؛ م هـ$_3$⃖ = $\frac{1}{2}$ و⃗ ؛ م هـ$_4$⃖ = $\frac{3}{10}$ و⃗ .

3 . (م ، و⃗) معلم لمستقيم (Δ) ، علم على (Δ) النقاط : هـ ، ق ، ك ، ط التي فواصلها على الترتيب : أ ؛ ب ؛ حـ ؛ د . ثم عين القياسات الجبرية للأشعة . ك ط⃖ ؛ ق ك⃖ ؛ ط ق⃖ ؛ ق هـ⃖ ؛ ط هـ⃖ وذلك في كلٍّ من الحالات الآتية :

1) أ = -2 ؛ ب = 4 ؛ حـ = $\frac{5}{2}$ ؛ د = $3,5$.

2) أ = 3 ؛ ب = $-7,2$ ؛ حـ = $4,5$ ؛ د = -1 .

3) أ = $-1,5$ ؛ ب = 2 ؛ حـ = 5 ؛ د = $-6,3$.

4 . (م ، و⃗) معلم لمستقيم (Δ) ، أ نقطة من (Δ) فاصلتها 4 .

عين فواصل النقاط : ب ؛ حـ ؛ د بحيث :

أب̅ = 7 ؛ أحـ̅ = -3 ؛ أد̅ = $3,5$.

5 . نمثل الزمن على مستقيم (Δ) . وحدة الأطوال هي السنتيمتر .

أ ، ب نقطتان من (Δ) بحيث : أب = 0,2 . تمثل النقطة أ أول جوان 1982 على الساعة 0 . وتمثل النقطة ب نفس اليوم على الساعة 1 .

1) علم على (Δ) النقطة حـ التي تمثل 2 جوان 1982 على الساعة 0 .

2) علم على (Δ) النقطة د التي تمثل 31 ماي 1982 على الساعة 0 .

3) ما هي فاصلة النقطة هـ في المعلم (أ ، أب⃖) التي تمثل 4 جوان 1982 على الساعة 9

4) ما هي فاصلة النقطة ف ، في المعلم (أ ، أب⃖) التي تمثل 30 ماي 1982 على الساعة 16 . ؟

6 . (م ، $\vec{و}$) معلم لمستقيم (Δ) .

ا ، ب نقطتان من (Δ) ، فاصلتاهما على الترتيب : $-\frac{2}{5}$ ، -3 .

1) عين فاصلة النقطة ن بحيث : $\overline{ان} = \overline{نب}$.

2) عين فاصلة النقطه ط بحيث : $\overline{طا} + 2\,\overline{طب} = 0$

3) عين فاصلة النقطة ق بحيث : $4\,\overline{قا} + 5\,\overline{قب} = 0$

7 . (م ، و) معلم لمستقيم (ف) . ا ، ب نقطتان من (ف) فاصلتاهما -2 ، 5 على الترتيب .

أحسب فاصلة النقطة ن بحيث : $\overline{نا} + 3\,\overline{مب} = \overline{اب}$.

8 . (م ، $\vec{و}$) معلم لمستقيم (ق) ، ا ، ب ، حـ ، ى أربع نقاط من (ق) فواصلها -4 ؛ $\frac{3}{2}$ ؛ -2 ؛ 5 على الترتيب .

1) أحسب : $\overline{اب}$ ؛ $\overline{بى}$ ؛ $\overline{اى}$ ؛ $\overline{بحـ}$.

2) تحقق من المساواة : $\overline{احـ} + \overline{بى} = \overline{اى} + \overline{بحـ}$.

3) اَ ، بَ ، حـَ ىَ نقط من (ف)

برهن ان : $\overline{اَحـَ} + \overline{بَىَ} = \overline{اَىَ} + \overline{بَحـَ}$

9 . (م ، $\vec{و}$) معلم لمستقيم (ق) . ا ، ب ، حـ ، ى ، هـ نقاط من (ق) فواصلها 3 ؛ -6 ؛ -3 ؛ 8 ؛ 2 على الترتيب .

1) أحسب : $\overline{اب}$ ؛ $\overline{بحـ}$ ؛ $\overline{حـى}$ ؛ $\overline{ىهـ}$.

2) تحقق من المساويات الآتية :

ا) $\overline{اب} + \overline{بحـ} + \overline{حـى} + \overline{ىهـ} = \overline{اهـ}$

ب) $\overline{اى} = \overline{مى} - \overline{ما}$ ؛ $\overline{بى} = \overline{اى} - \overline{اب}$

حـ) $\overline{ىا} \cdot \overline{بحـ} + \overline{ىب} \cdot \overline{حـا} + \overline{ىحـ} \cdot \overline{اب} = 0$

10. (Δ ، $\vec{و}$) محور . ا ، ب نقطتان من (Δ)،بين أنه من أجل كل نقطة ن من (Δ) :

$(\overline{اب})^2 = (\overline{ان})^2 + (\overline{نب})^2 + 2\,\overline{ان} \cdot \overline{نب}$.

11. (ق ، $\vec{و}$) محور ، ا ؛ ب ؛ حـ ؛ ى أربع نقاط من (ق) . بين أن :

1) $\overline{ىا} \cdot \overline{بحـ} + \overline{ىب} \cdot \overline{حـا} + \overline{ىحـ} \cdot \overline{اب} = 0$

2) $(\overline{\text{ءا}})^2 . \overline{\text{بح}} + (\overline{\text{ءب}})^2 . (\overline{\text{حا}}) + (\overline{\text{ءح}})^2 . \overline{\text{اب}} + \overline{\text{بح}} . \overline{\text{حا}} . \overline{\text{اب}} = 0$

12. (م ، $\overleftarrow{\text{و}}$) معلم لمستقيم (Δ) . ا ، ب نقطتان من (Δ) فاصلتاهما ق ، ك على الترتيب . عين فاصلة النقطة ه التي هي منتصف القطعة [ا ب] في كل من الحالات الآتية

1) ا = $-\frac{7}{2}$ ؛ ب = 3

2) ا = -5 ؛ ب = 5

3) ا = $-\frac{5}{3}$ ؛ ب = $-\frac{4}{3}$

13. (م ، $\overleftarrow{\text{و}}$) معلم لمستقيم (ق) . ه ، ط ، ك ثلاث نقاط من (ق) فواصلها -6 ؛ $-\frac{3}{2}$ ؛ -1 على الترتيب .

1) عين فاصلة النقطة ل من (ق) بحيث : $\overline{\text{هط}} = \overline{\text{كل}}$

2) بين أن للقطعتين [ه ل] ، [ط ك] نفس المنتصف .

3) ا ، ب ، ح ، ء أربع نقاط من (ق) بحيث أن للقطعتين [ا ب] ، [ح ء] نفس المنتصف .
بين أن : $\overline{\text{اح}} = \overline{\text{ءب}}$.

14. (م ، $\overleftarrow{\text{و}}$) معلم لمستقيم (ق) . ا ، ب ، ح نقاط من (ق) فواصلها على الترتيب

ا = $-\frac{5}{2}$ ؛ ب = $-\frac{7}{4}$ ؛ ح = $\frac{9}{2}$

1) أحسب فاصلة النقطة ه التي هي منتصف القطعة [ا ب] .

2) أحسب : $\overline{\text{حا}}$ ؛ $\overline{\text{حب}}$ ؛ $\overline{\text{حه}}$.

3) بين أن : $\overline{\text{حا}} + \overline{\text{حب}} = 2\,\overline{\text{حه}}$.

4) اَ ، بَ ، حَ ثلاث نقاط من (ق) ، هَ منتصف القطعة [اَ بَ]
بين أن : $\overline{\text{حَاَ}} + \overline{\text{حَبَ}} = 2\,\overline{\text{حَهَ}}$.

15. (م ، $\overleftarrow{\text{و}}$) معلم لمستقيم (ق) . ا ، ب ، نقطتان من (ق) فاصلتاهما 3 ، -5 على الترتيب .

عين المجموعة ج بحيث :

ج = { ه | ه ∈ (ق) و $\overline{\text{ها}} . \overline{\text{هب}} \geqslant 0$ }

16. (م ، و⃗) معلم لمستقيم (ق) ؛ ا ، ب ، حـ ، ء أربع نقاط من (ق) فواصلها

على الترتيب : $-\frac{3}{5}$ ؛ $\frac{2}{3}$ ؛ $\frac{4}{5}$ ؛ $-\frac{1}{6}$

هـ منتصف القطعة [ا ب] ، ﻫ منتصف القطعة [حـ ء]

1) أحسب فاصلتي النقطتين هـ ، ﻫ .

2) أحسب : $\overline{\text{ا حـ}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$ ، $\overline{\text{هـ ﻫ}}$.

3) برهن أن : $\overline{\text{ا حـ}} + \overline{\text{ب ء}} = 2\,\overline{\text{هـ ﻫ}}$.

17. (م ، و⃗) معلم لمستقيم (ق) ؛ ا ، ب ، حـ ، ء أربع نقاط من (ق) فواصلها على الترتيب س ، ص ، ع ، ل . هـ منتصف القطعة [ا ب] ؛ ﻫ منتصف [حـ ء] . ف ، ك هما فاصلتا هـ ، ﻫ على الترتيب .

1) أحسب ف ، ك .

2) أحسب : $\overline{\text{هـ ﻫ}}$ ، $\overline{\text{ا حـ}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$.

3) برهن أن : $\overline{\text{ا حـ}} + \overline{\text{ب ء}} = 2\,\overline{\text{هـ ﻫ}}$.

18 . (م ، و⃗) معلم لمستقيم (∆) . ا ، ب ، حـ ، ء نقاط من (∆) فواصلها على الترتيب : – 2 ؛ 8 ؛ – 22 ؛ 2 .

1) أحسب فاصلة ﻫ منتصف القطعة [ا ب] .

2) أحسب $\overline{\text{ﻫ ا}}$ ، $\overline{\text{ﻫ حـ}}$ ، $\overline{\text{ﻫ ء}}$ ، $\overline{\text{ا ب}}$ ، $\overline{\text{ا حـ}}$ ، $\overline{\text{ا ء}}$.

3) تحقق من أن : $(\overline{\text{ﻫ ا}})^2 = \overline{\text{ﻫ حـ}} \cdot \overline{\text{ﻫ ء}}$.

4) تحقق من أن : $\frac{2}{\overline{\text{ا ب}}} = \frac{1}{\overline{\text{ا حـ}}} + \frac{1}{\overline{\text{ا ء}}}$.

19. (م ، و⃗) معلم لمستقيم (∆) . ا ، ب ، حـ ، ء أربع نقاط من (∆) فواصلها على الترتيب : س ، ع ، ص ، ف .

أحسب م (ا ، ب) ؛ م (ا ، حـ) ؛ م (ب ، حـ) ؛ م (حـ ، ء) في كل من الحالتين الآتيتين :

1) س = – 9 ؛ ع = $\frac{3}{5}$ ؛ ص = $-\frac{1}{2}$ ؛ ف = – 3 .

2) س = – 11 ؛ ع = – 3,75 ؛ ص = $\frac{1}{6}$ ؛ ف = 2,5 .

20. (م ؛ $\vec{و}$) معلم لمستقيم (Δ) ، أ نقطة من (Δ) فاصلتها -3 .

1) بين أنه توجد نقطة وحيدة ب من (Δ) فاصلتها ف

بحيث : م (أ ، ب) $= 5$ ، ف $\leqslant -3$.

2) بين أنه توجد نقطة وحيدة حـ من (Δ) فاصلتها ك بحيث :

م (أ ، حـ) $= 3$ و $-3 \leqslant$ ك

ما هي هذه النقطة ؟

21. (م ؛ $\vec{و}$) معلم لمستقيم (Δ) . أ نقطة من (Δ) ، س عدد حقيقي .

عين في كل من الحالات الآتية مجموعة النقاط ن من (Δ) بحيث :

م (أ ، ن) = س .

1) س $= 0$ ؛ 2) س > 0 ؛ 3) س < 0

22. (م ، $\vec{و}$) معلم لمستقيم (ق) . أ عدد حقيقي موجب غير معدوم ، ن نقطة من (ق) فاصلتها س .

1) أحسب بدلالة س و أ الفاصلة ف للنقطة ط من (Δ) بحيث :

م (ن ، ط) = أ ، ف $\leqslant$ س

2) أحسب بدلالة س ، أ الفاصلة حـ للنقطة ج من (Δ) بحيث :

م (ن ، ج) = أ ، س $\leqslant$ حـ

3) أحسب : م (ط ، ج) .

23. (م ، $\vec{و}$) معلم لمستقيم (ق) ، $\vec{و'}$ شعاع بحيث : $\vec{و'} = -2\vec{و}$.

أ ، ب ، حـ ثلاث نقاط من (ق) فواصلها على الترتيب : 5 ؛ 3,2 ؛ $\frac{7}{2}$

بالنسبة للمعلم (م ، $\vec{و}$) .

عين فاصلة كل من النقاط أ ، ب ، حـ بالنسبة للمعلم (م ، $\vec{و'}$) .

24. (م ، $\vec{و}$) ، (م ، $\vec{و'}$) معلمان لنفس المستقيم (ق) بحيث : $\vec{و'} = 3\vec{و}$

أ ، ب ، حـ ، د أربع نقاط من (Δ) . أكمل الجدول الآتي :

النقطة	الفاصلة بالنسبة للمعلم (م ، $\vec{و}$)	الفاصلة بالنسبة للمعلم (م ، $\vec{و'}$)
أ	2	
ب	– 4	......
حـ		6
ء		$\frac{3}{2}$

25. (م ، $\vec{و}$) معلم لمستقيم (ق) ، مَ نقطة من (ق) فاصلتها 2 .
أ ، ب ، حـ ثلاث نقاط فواصلها بالنسبة للمعلم (م ، $\vec{و}$) هي : – 3 ؛ 5 ؛ 2,5 على الترتيب
أوجد فواصل هذه النقاط بالنسبة للمعلم (مَ ، $\vec{و}$) .

26. (م ، $\vec{و}$) معلم لمستقيم (ق) . أ نقطة من (ق) فاصلتها – 5 بالنسبة للمعلم (م ، $\vec{و}$) وفاصلتها 8 بالنسبة لمعلم آخر (مَ ، $\vec{و}$) من (ق)
أحسب فاصلة النقطة مَ في المعلم (م ، $\vec{و}$) .

27. (م ، $\vec{و}$) معلم لمستقيم (ق) . علم على (ق) النقطتين أ ، ب اللتين فاصلتاهما 5 ؛ – 6 على الترتيب .
علِّم على (ق) كلاً من النقاط الآتية :
1) النقطة حـ التي تقسم [أ ب] في النسبة – 2
2) النقطة ء التي تقسم [أ ب] في النسبة – $\frac{1}{3}$.
3) النقطة هـ التي تقسم [أ ب] في النسبة – 1 .

28 . (م ، $\vec{و}$) معلم لمستقيم (ق) . أ ؛ ب ؛ حـ ؛ ء أربع نقاط من (ق) فواصلها :
– 8 ؛ – 2 ؛ – 4 ؛ 4 على الترتيب .
1) بين أن : $\frac{\overline{\text{حـ أ}}}{\overline{\text{حـ ب}}} = - \frac{\overline{\text{ء أ}}}{\overline{\text{ء ب}}}$
2) هل تبقى المساواة السابقة محققة إذا تغير المعلم ؟

29. (م ، $\vec{و}$) معلم لمستقيم (ق) . أ ، ب ، حـ ، ء أربع نقاط من (ق) فواصلها على الترتيب س ؛ ع ، ص ؛ ف بحيث :

$$\frac{\overline{حـ أ}}{\overline{حـ ب}} = -\frac{\overline{ء أ}}{\overline{ء ب}}$$

بين أن : 2 (س ع + ص ف) = (س + ع) (ص + ف)

30. (م ، $\vec{و}$) معلم لمستقيم (Δ) . أ ، ب نقطتان من (Δ) فاصلتاهما على الترتيب ق ، ك . ط ، ل عددان حقيقيان . علم على (Δ) في كل حالة من الحالات الآتية النقطتين أ ، ب ثم عين مركز البعدين المتناسبين للنقطتين أ ، ب المرفقتين بالمعاملين ط ، ل :

1) ق = − 9 ؛ ك = 5 ؛ ط = 3 ؛ ل = 2 .

2) ق = $\frac{3}{2}$ ؛ ك = − 2 ؛ ط = − 1 ؛ ل = 6 .

3) ق = − 2 ؛ ك = − $\frac{5}{3}$ ؛ ط = − 4 ؛ ل = 4 .

4) ق = − 4 ؛ ك = − 1 ؛ ط = $\frac{1}{2}$ ؛ ل = − 3 .

31. (م ، $\vec{و}$) معلم لمستقيم (ق) ؛ أ ، ب نقطتان من المستقيم (ق) فاصلتاهما على الترتيب 3 ، − 3 .

1) عين فاصلة ك مركز البعدين المتناسبين للنقطتين أ ، ب المرفقتين بالمعاملان : 2 ، − 5 .

2) بين أن : 2 $\overline{م أ}$ − 5 $\overline{م ب}$ = − 3 $\overline{م ك}$.

2 $\overline{م أ}^2$ − 5 $\overline{م ب}^2$ = − 3 $\overline{م ك}^2$ + 2 $\overline{ك أ}^2$ − 5 $\overline{ك ب}^2$

32. (م ، $\vec{و}$) معلم لمستقيم (ق) . أ ، ب نقطتان من (ق) فاصلتاهما على الترتيب :

5 ؛ − 3 .

1) بين أن مركز البعدين المتناسبين للنقطتين أ ، ب المرفقتين بالمعاملين 3 ، 5 هو النقطة م .

2) بين أنه من أجل كل نقطة هـ من (ق) :

$$3\,\overline{\text{هـ أ}} + 5\,\overline{\text{هـ ب}} = 8\,\overline{\text{هـ م}}$$

$$3\,\overline{\text{هـ أ}}^2 + 5\,\overline{\text{هـ ب}}^2 = 8\,\overline{\text{م هـ}}^2 + 3\,\overline{\text{م أ}}^2 + 5\,\overline{\text{م ب}}^2 .$$

33. (Δ) مستقيم مدرج ذو معلم (م ، $\vec{\text{و}}$) ؛ ق ، ك نقطتان من (Δ) فاصلتاهما على الترتيب س_1 ، س_2 . أ عدد حقيقي .

1) بين أن مركز البعدين المتناسبين للنقطتين ق ، ك المرفقتين بنفس العدد أ هو منتصف القطعة [ق ك] .

2) بين أن النقطة التي تقسم [ق ك] في النسبة − 1 هي منتصف القطعة [ق ك] .

جــدول

مربعات الأعداد الطبيعية ومكعباتها ومقلوباتها وجذورها التربيعية
من 1 إلى 200

$\sqrt{ع}$	$\frac{1}{ع}$	$ع^{3}$	$ع^{2}$	ع
1	1	1	1	1
1,414	0,5000	8	4	2
1,732	0,3333	27	9	3
2,000	0,2500	64	16	4
2,236	0,2000	125	25	5
2,449	0,1667	216	36	6
2,646	0,1429	343	49	7
2,828	0,1250	512	64	8
3,000	0,1111	729	81	9
3,162	0,1000	1 000	100	10
3,317	0,0909	1 331	121	11
3,464	0,0833	1 728	144	12
3,606	0,0769	2 197	169	13
3,742	0,0714	2 744	196	14
3,873	0,0667	3 375	225	15
4,000	0,0625	4 096	256	16
4,123	0,0588	4 913	289	17
4,243	0,0556	5 832	324	18
4,359	0,0526	6 859	361	19
4,472	0,0500	8 000	400	20
4,583	0,0476	9 261	441	21
4,690	0,0455	10 648	484	22
4,796	0,0435	12 167	529	23
4,899	0,0417	13 824	576	24
5,000	0,0400	15 625	625	25
5,099	0,0385	17 576	676	26
5,196	0,0370	19 683	729	27
5,292	0,0357	21 952	784	28
5,385	0,0345	24 389	841	29
5,477	0,0333	27 000	900	30
5,568	0,0323	29 791	961	31
5,657	0,0313	32 768	1 024	32
5,745	0,0303	35 937	1 089	33
5,831	0,0294	39 304	1 156	34
5,916	0,0286	42 875	1 225	35
6,000	0,0278	46 656	1 296	36
6,083	0,0270	50 653	1 369	37
6,164	0,0263	54 872	1 444	38
6,245	0,0256	59 319	1 521	39
6,325	0,0250	64 000	1 600	40
6,403	0,0244	68 921	1 681	41
6,481	0,0238	74 088	1 764	42
6,557	0,0233	79 507	1 849	43
6,633	0,0227	85 184	1 936	44
6,708	0,0222	91 125	2 025	45
6,782	0,0217	97 336	2 116	46
6,856	0,0213	103 823	2 209	47
6,928	0,0208	110 592	2 304	48
7,000	0,0204	117 649	2 401	49
7,071	0,0200	125 000	2 500	50

$\sqrt{ع}$	$\frac{1}{ع}$	$ع^{3}$	$ع^{2}$	ع
7,141	0,0196	132 651	2 601	51
7,211	0,0192	140 608	2 704	52
7,280	0,0189	148 877	2 809	53
7,348	0,0185	157 464	2 916	54
7,416	0,0182	166 375	3 025	55
7,483	0,0179	175 616	3 136	56
7,550	0,0175	185 193	3 249	57
7,616	0,0172	195 112	3 364	58
7,681	0,0169	205 379	3 481	59
7,746	0,0167	216 000	3 600	60
7,810	0,0164	226 981	3 721	61
7,874	0,0161	238 328	3 844	62
7,937	0,0159	250 047	3 969	63
8,000	0,0156	262 144	4 096	64
8,062	0,0154	274 625	4 225	65
8,124	0,0152	287 496	4 356	66
8,185	0,0149	300 763	4 489	67
8,246	0,0147	314 432	4 624	68
8,307	0,0145	328 509	4 761	69
8,367	0,0143	343 000	4 900	70
8,426	0,0141	357 911	5 041	71
8,485	0,0139	373 248	5 184	72
8,544	0,0137	389 017	5 329	73
8,602	0,0135	405 224	5 476	74
8,660	0,0133	421 875	5 625	75
8,718	0,0132	438 976	5 776	76
8,775	0,0130	456 533	5 929	77
8,832	0,0128	474 552	6 084	78
8,888	0,0127	493 039	6 241	79
8,944	0,0125	512 000	6 400	80
9,000	0,0123	531 441	6 561	81
9,055	0,0122	551 368	6 724	82
9,110	0,0120	571 787	6 889	83
9,165	0,0119	592 704	7 056	84
9,220	0,0118	614 125	7 225	85
9,274	0,0116	636 056	7 396	86
9,327	0,0115	658 503	7 569	87
9,381	0,0114	681 472	7 744	88
9,434	0,0112	704 969	7 921	89
9,487	0,0111	729 000	8 100	90
9,539	0,0110	753 571	8 281	91
9,592	0,0109	778 688	8 464	92
9,644	0,0108	804 357	8 649	93
9,695	0,0106	830 584	8 836	94
9,747	0,0105	857 375	9 025	95
9,798	0,0104	884 736	9 216	96
9,849	0,0103	912 673	9 409	97
9,899	0,0102	941 192	9 604	98
9,950	0,0101	970 299	9 801	99
10,000	0,0100	1 000 000	10 000	100

$\sqrt{ع}$	$\frac{1}{ع}$	$ع^3$	$ع^2$	ع
10,0499	0,0099	1 030 301	10 201	101
10,0995	0,0098	1 061 208	10 404	102
10,1489	0,0097	1 092 727	10 609	103
10,1980	0,0096	1 124 864	10 816	104
10,2470	0,0095	1 157 625	11 025	105
10,2956	0,0094	1 191 016	11 236	106
10,3441	0,0093	1 225 043	11 449	107
10,3923	0,0093	1 259 712	11 664	108
10,4403	0,0092	1 295 029	11 881	109
10,4881	0,0091	1 331 000	12 100	110
10,5357	0,0090	1 367 631	12 321	111
10,5830	0,0089	1 404 928	12 544	112
10,6301	0,0089	1 442 897	12 769	113
10,6771	0,0088	1 481 544	12 996	114
10,7238	0,0087	1 520 875	13 225	115
10,7703	0,0086	1 560 896	13 456	116
10,8167	0,0085	1 601 613	13 689	117
10,8628	0,0085	1 643 032	13 924	118
10,9087	0,0084	1 685 159	14 161	119
10,9545	0,0083	1 728 000	14 400	120
11,0000	0,0083	1 771 561	14 641	121
11,0454	0,0082	1 815 848	14 884	122
11,0905	0,0081	1 860 867	15 129	123
11,1355	0,0081	1 906 624	15 376	124
11,1803	0,0080	1 953 125	15 625	125
11,2250	0,0079	2 000 376	15 876	126
11,2694	0,0079	2 048 383	16 129	127
11,3137	0,0078	2 097 152	16 384	128
11,3578	0,0078	2 146 689	16 641	129
11,4018	0,0077	2 197 000	16 900	130
11,4455	0,0076	2 248 091	17 161	131
11,4891	0,0076	2 299 968	17 424	132
11,5326	0,0075	2 352 637	17 689	133
11,5758	0,0075	2 406 104	17 956	134
11,6190	0,0074	2 460 375	18 225	135
11,6619	0,0074	2 515 456	18 496	136
11,7047	0,0073	2 571 353	18 769	137
11,7473	0,0072	2 628 072	19 044	138
11,7898	0,0072	2 685 619	19 321	139
11,8322	0,0071	2 744 000	19 600	140
11,8743	0,0071	2 803 221	19 881	141
11,9164	0,0070	2 863 288	20 164	142
11,9583	0,0070	2 924 207	20 449	143
12,0000	0,0069	2 985 984	20 736	144
12,0416	0,0069	3 048 625	21 025	145
12,0830	0,0068	3 112 136	21 316	146
12,1244	0,0068	3 176 523	21 609	147
12,1655	0,0068	3 241 792	21 904	148
12,2066	0,0067	3 307 949	22 201	149
12,2474	0,0067	3 375 000	22 500	150

$\sqrt{ع}$	$\frac{1}{ع}$	$ع^3$	$ع^2$	ع
12,2882	0,0066	3 442 951	22 801	151
12,3288	0,0066	3 511 808	23 104	152
12,3693	0,0065	3 581 577	23 409	153
12,4097	0,0065	3 652 264	23 716	154
12,4499	0,0065	3 723 875	24 025	155
12,4900	0,0064	3 796 416	24 336	156
12,5300	0,0064	3 869 893	24 649	157
12,5698	0,0063	3 944 312	24 964	158
12,6095	0,0063	4 019 679	25 281	159
12,6491	0,0063	4 096 000	25 600	160
12,6886	0,0062	4 173 281	25 921	161
12,7279	0,0062	4 251 528	26 244	162
12,7671	0,0061	4 330 747	26 569	163
12,8062	0,0061	4 410 944	26 896	164
12,8452	0,0061	4 492 125	27 225	165
12,8841	0,0060	4 574 296	27 556	166
12,9228	0,0060	4 657 463	27 889	167
12,9615	0,0060	4 741 632	28 224	168
13,0000	0,0059	4 826 809	28 561	169
13,0384	0,0059	4 913 000	28 900	170
13,0767	0,0058	5 000 211	29 241	171
13,1149	0,0058	5 088 448	29 584	172
13,1529	0,0058	5 177 717	29 929	173
13,1909	0,0057	5 268 024	30 276	174
13,2288	0,0057	5 359 375	30 625	175
13,2665	0,0057	5 451 776	30 976	176
13,3041	0,0057	5 545 233	31 329	177
13,3417	0,0056	5 639 752	31 684	178
13,3791	0,0056	5 735 339	32 041	179
13,4164	0,0056	5 832 000	32 400	180
13,4536	0,0055	5 929 741	32 761	181
13,4907	0,0055	6 028 568	33 124	182
13,5277	0,0055	6 128 487	33 489	183
13,5647	0,0054	6 229 504	33 856	184
13,6015	0,0054	6 331 625	34 225	185
13,6382	0,0054	6 434 856	34 596	186
13,6748	0,0053	6 539 203	34 969	187
13,7113	0,0053	6 644 672	35 344	188
13,7477	0,0053	6 751 269	35 721	189
13,7840	0,0053	6 859 000	36 100	190
13,8203	0,0052	6 967 871	36 481	191
13,8564	0,0052	7 077 888	36 864	192
13,8924	0,0052	7 189 057	37 249	193
13,9284	0,0052	7 301 384	37 636	194
13,9642	0,0051	7 414 875	38 025	195
14,0000	0,0051	7 529 536	38 416	196
14,0357	0,0051	7 645 373	38 809	197
14,0712	0,0051	7 762 392	39 204	198
14,1067	0,0050	7 880 599	39 601	199
14,1421	0,0050	8 000 000	40 000	200

موضوعات الكتاب

محتـويات الكتـاب

عنوان الـدرس | الصفحة

الـدرس الأول

الـدرس الثاني

الـدرس الثالث

الـدرس الرابع

الـدرس الخامس

عنوان الدرس الصفحة

طبع المؤسسة الوطنية للفنون المطبعية
وحدة الرغاية ــ 1987

1988-1987

